

**PREGLED
FORMULA
IZ
POSLOVNE
STATISTIKE**

Sadržaj

2. Grafičko prikazivanje podataka	1
3. Brojčane mjere opisne statistike	3
4. Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti	11
5. Slučajne varijable i distribucije vjerojatnosti	13
6. Procjene i testovi hipoteza o parametrima jedne populacije	17
7. Procjene i testovi hipoteza o parametrima dviju populacija	21
8. Korelacija i jednostavna linearna regresija	25
9. Višestruka linearna regresija	31
10. Metode poslovne prognostike	35
11. Metode statističke kontrole kvalitete	45
12. Uvod u statističku analizu odlučivanja	49
Statističke tablice	51
Prijevod računalnih ispisa po područjima	59

2.

Grafičko prikazivanje podataka

1. Zbroj absolutnih frekvencija – populacija

$$\sum_{i=1}^k f_i = N$$

f_i – absolutna frekvencija i -te grupe, tj. razreda.

2. Zbroj absolutnih frekvencija – uzorak

$$\sum_{i=1}^k f_i = n$$

f_i – absolutna frekvencija i -te grupe, tj. razreda.

3. Relativna frekvencija – proporcija

$$\text{proporcija}_i = \frac{\text{dio}_i}{\text{cjelina}} = \frac{\text{absolutna frekvencija}_i}{\text{zbroj svih absolutnih frekvencija}}$$
$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{f_i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

p_i – proporcija i -te grupe, tj. razreda,

f_i – absolutna frekvencija i -te grupe, tj. razreda,

k – broj grupa,

n – broj podataka u uzorku.

4. Relativna frekvencija – postotak

$$\text{postotak}_i = \frac{\text{dio}_i}{\text{cjelina}} \cdot 100\% = \frac{\text{absolutna frekvencija}_i}{\text{zbroj svih absolutnih frekvencija}} \cdot 100\%$$
$$P_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{f_i}{n} \cdot 100\% = p_i \cdot 100\%, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

P_i – postotak i -te grupe, tj. razreda,

p_i – proporcija i -te grupe, tj. razreda,

f_i – absolutna frekvencija i -te grupe, tj. razreda,

k – broj grupa,

n – broj podataka u uzorku.

5. Svojstva relativnih frekvencija – proporcija

$$p_i \geq 0, \quad \forall i$$

$$0 \leq p_i \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1$$

6. Svojstva relativnih frekvencija – postotak

$$0\% \leq P_i \leq 100\%$$

$$\sum_{i=1}^k P_i = 100\%$$

7. Broj razreda – Sturgesovo pravilo

$$k \approx 1 + 3,3 \cdot \log_{10} n$$

k – broj razreda,

n – broj podataka u uzorku.

8. Širina razreda

$$\text{širina razreda} = \frac{\text{najveća vrijednost} - \text{najmanja vrijednost}}{\text{željeni broj razreda}}$$

$$i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$$

i – širina razreda,

x_{\max} – najveća vrijednost podatka,

x_{\min} – najmanja vrijednost podatka,

k – broj razreda.

3.

Brojčane mjere opisne statistike

1. Aritmetička sredina populacije

$$\mu = \frac{\text{zbroj svih vrijednosti podataka u populaciji}}{\text{broj podataka u populaciji}} = \frac{\text{total populacije}}{\text{opseg populacije}}$$

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

μ – prosjek populacije,

x_i – vrijednost i -tog podatka populacije,

N – broj podataka u populaciji.

2. Aritmetička sredina uzorka

$$\bar{x} = \frac{\text{zbroj svih vrijednosti podataka u uzorku}}{\text{broj podataka u uzorku}} = \frac{\text{total uzorka}}{\text{broj podataka u uzorku}}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

\bar{x} – prosjek uzorka,

x_i – vrijednost i -tog podatka uzorka,

n – broj podataka u uzorku.

3. Vagana sredina populacije

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

f_i – frekvencija i -te vrijednosti varijable,

x_i – vrijednost diskretnе varijable i -tog razredа populacije ili razredna sredina intervala distribucije frekvencija,

k – broj grupa ili razreda,

$\sum_{i=1}^k f_i = N$ – veličina populacije.

4. Vagana sredina uzorka

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

f_i – frekvencija i -te vrijednosti varijable,

x_i – vrijednost diskretnе varijable i -tог razredа uzorka ili razredna sredina intervala distribucije frekvencija,

k – broj grupa ili razreda,

$\sum_{i=1}^k f_i = n$ – veličina uzorka.

5. Razredna sredina

$$x_i = \frac{\text{gornja granica razreda}_i + \text{donja granica razreda}_i}{2}$$

$$x_i = \frac{L_{gi} + L_{di}}{2} \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, k$$

L_{di} – donja granica razreda i ,

L_{gi} – gornja granica razreda i ,

k – broj razreda.

6. Medijan

$$i_{Me} = \frac{1}{2}n$$

i_{Me} – medijalna točka,

n – broj podataka u uzorku.

Ako je i_{Me} cijeli broj, medijan se određuje kao prosjek vrijednosti podatka na medijalnoj točki i sljedećeg podatka.

Ako i_{Me} nije cijeli broj, medijan se određuje kao vrijednost podatka na prvom rednom mjestu većem od medijalne točke.

7. Prva kvartilna točka

$$i_1 = \frac{1}{4}n$$

i_1 – prva kvartilna točka,

n – broj podataka u uzorku.

Ako je i_1 cijeli broj, kvartil se određuje kao prosjek vrijednosti podatka na kvartilnoj točki i sljedećeg podatka. Ako i_1 nije cijeli broj, kvartil se određuje kao vrijednost podatka na prvom rednom mjestu većem od kvartilne točke.

8. Treća kvartilna točka

$$i_3 = 3 \frac{1}{4}n$$

i_3 – treća kvartilna točka,

n – broj podataka u uzorku.

Ako je i_3 cijeli broj, kvartil se određuje kao prosjek vrijednosti podatka na kvartilnoj točki i sljedećeg podatka. Ako i_3 nije cijeli broj, kvartil se određuje kao vrijednost podatka na prvom rednom mjestu većem od kvartilne točke.

9. Geometrijska sredina negrupiranih podataka uzorka

$$G = \sqrt[n]{(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)}, \quad x_i > 0 \quad \forall i$$

G – jednostavna geometrijska sredina,

n – broj podataka u uzorku,

x_i – vrijednost i -tog podatka uzorka.

10. Prosječna stopa povrata na ulaganje dobivena pomoću geometrijske sredine

$$S_G = \bar{R}_G \cdot 100\%$$

$$\bar{R}_G = \sqrt[n]{[(1 + R_1) \cdot (1 + R_2) \cdot \dots \cdot (1 + R_i) \cdot \dots \cdot (1 + R_n)]} - 1$$

$$R_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

\bar{R}_G – prosječna stopa povrata (nemnožena sa 100) određena kao geometrijska sredina koeficijenata dinamike: $(1 + R_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ gdje je R_i – stopa povrata u i -tom razdoblju (nemnožena sa 100),

n – ukupan broj razdoblja ulaganja,

x_i – vrijednost ulaganja u i -tom razdoblju.

11. Raspon podataka

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

x_{\max} – najveća vrijednost,

x_{\min} – najmanja vrijednost.

12. Interkvartilni raspon

$$I_Q = Q_3 - Q_1$$

Q_1 – prvi kvartil,

Q_3 – treći kvartil.

13. Varijanca negrupiranih podataka populacije

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}{N}}{N}$$

σ^2 – varijanca populacije,

x_i – vrijednost i -tog podatka populacije,

μ – prosjek populacije,

N – broj podataka u populaciji.

14. Standardna devijacija negrupiranih podataka populacije

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}{N}}{N}}$$

σ^2 – varijanca populacije,
 σ – standardna devijacija populacije,
 x_i – vrijednost i -tog podatka populacije,
 μ – prosjek populacije,
 N – broj podataka u populaciji.

15. Varijanca grupiranih podataka populacije

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i(x_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^k f_i x_i\right)^2}{N}}{N}$$

σ^2 – varijanca populacije,
 x_i – vrijednost varijable i -tog razreda (diskretna vrijednost ili razredna sredina intervala diskretne ili kontinuirane varijable),
 f_i – absolutne frekvencije (ponderi) ili težine populacije,
 μ – prosjek populacije,
 k – broj razreda ili intervala,
 $N = \sum_{i=1}^k f_i$ – veličina populacije.

16. Standardna devijacija grupiranih podataka populacije

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i(x_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^k f_i x_i\right)^2}{N}}{N}}$$

σ^2 – varijanca populacije,
 σ – standardna devijacija populacije,
 x_i – vrijednost varijable i -tog razreda (diskretna vrijednost ili razredna sredina intervala diskretne ili kontinuirane varijable),
 f_i – absolutne frekvencije (ponderi) ili težine populacije,
 μ – prosjek populacije,
 k – broj razreda ili intervala,
 $N = \sum_{i=1}^k f_i$ – veličina populacije.

17. Varijanca negrupiranih podataka uzorka

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

s^2 – varijanca uzorka,
 x_i – vrijednost i -tog podatka uzorka,
 \bar{x} – prosjek uzorka,
 n – broj podataka u uzorku.

18. Standardna devijacija negrupiranih podataka uzorka

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}{n-1}}$$

s^2 – varijanca uzorka,

s – standardna devijacija uzorka,

x_i – vrijednost i -tog podatka uzorka,

\bar{x} – prosjek uzorka,

n – broj podataka u uzorku.

19. Varijanca grupiranih podataka uzorka

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^k f_i x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

s^2 – varijanca uzorka,

\bar{x} – prosjek uzorka,

x_i – vrijednost varijable i -tog razreda (diskretna vrijednost ili razredna sredina intervala diskretne ili kontinuirane varijable),

f_i – frekvencije (ponderi) ili težine uzorka,

k – broj razreda ili intervala,

$n = \sum_{i=1}^k f_i$ – veličina uzorka,

$(n-1)$ – broj stupnjeva slobode.

20. Standardna devijacija grupiranih podataka uzorka

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^k f_i x_i\right)^2}{n}}{n-1}}$$

s^2 – varijanca uzorka,

s – standardna devijacija uzorka,

\bar{x} – prosjek uzorka,

x_i – vrijednost varijable i -tog razreda (diskretna vrijednost ili razredna sredina intervala diskretne ili kontinuirane varijable),

f_i – frekvencije (ponderi) ili težine uzorka,

k – broj razreda ili intervala,

$n = \sum_{i=1}^k f_i$ – veličina uzorka,

$(n-1)$ – broj stupnjeva slobode.

21. Srednje apsolutno odstupanje (MAD=Mean Absolute Deviation) u populaciji, negrupirani podaci

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \mu|}{N}$$

x_i – i -ta vrijednost podatka populacije,
 N – broj podataka u populaciji,
 μ – prosjek populacije.

22. Srednje apsolutno odstupanje (MAD) u uzorku, negrupirani podaci

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

x_i – i -ta vrijednost podatka uzorka,
 n – broj podataka u uzorku,
 \bar{x} – prosjek uzorka.

23. Srednje apsolutno odstupanje od medijana populacije

$$MAD_{Me} = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - M_e|}{N}$$

x_i – i -ta vrijednost podatka populacije,
 N – broj podataka u populaciji,
 M_e – medijan populacije.

24. Srednje apsolutno odstupanje od medijana uzorka

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - M_e|}{n}$$

x_i – i -ta vrijednost podatka uzorka,
 n – broj podataka u uzorku,
 M_e – medijan uzorka.

25. Koeficijenti varijacije populacije

$$V = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\%$$

σ – standardna devijacija populacije,
 μ – prosjek populacije.

26. Koeficijent varijacije uzorka

$$V = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

s – standardna devijacija uzorka,
 \bar{x} – prosjek uzorka.

27. Koeficijent asimetrije populacije

$$\alpha_3 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^3}{N\sigma^3}$$

x_i – vrijednost i -tog podatka populacije,
 μ – prosjek populacije,
 σ – standardna devijacija populacije,
 N – broj podataka u populaciji.

28. Koeficijent asimetrije uzorka

$$\alpha_3 = skewness = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^3$$

x_i – vrijednost i -tog podatka uzorka,
 \bar{x} – prosjek uzorka,
 s – standardna devijacija uzorka,
 n – broj podataka u uzorku.

29. Pokazatelj zaobljenosti kod populacije

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^4}{N\sigma^4}$$

x_i – vrijednost i -tog podatka populacije,
 μ – prosjek populacije,
 σ – standardna devijacija populacije,
 N – broj podataka u populaciji.

30. Eksces (kurtosis)

$$\kappa = \alpha_4 - 3$$

α_4 – pokazatelj zaobljenosti.

31. Pokazatelj zaobljenosti kod uzorka eksces (kurtosis)

$$eksces = kurtosis = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

x_i – vrijednost i -tog podatka uzorka,
 \bar{x} – prosjek uzorka,
 s – standardna devijacija uzorka,
 n – broj podataka u uzorku.

32. Čebiševljevo pravilo

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \leq \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \text{ za } k > 1$$

33. Standardizirana vrijednost populacije

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

x_i – vrijednost i -tog podatka populacije,
 μ – prosjek populacije,
 σ – standardna devijacija populacije.

34. Standardizirana vrijednost uzorka

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

x_i – vrijednost i -tog podatka uzorka,
 \bar{x} – prosjek uzorka,
 s – standardna devijacija uzorka.

35. Kovarijanca populacije

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{N}$$

$\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$ – kovarijacija (mješoviti produkt) populacije,
 μ_x – aritmetička sredina podataka varijable X za populaciju,
 μ_y – aritmetička sredina podataka varijable Y za populaciju.

36. Kovarijanca uzorka

$$s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}$$

$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ – kovarijacija (mješoviti produkt) uzorka,
 \bar{x} – aritmetička sredina podataka varijable X u uzorku,
 \bar{y} – aritmetička sredina podataka varijable Y u uzorku.

37. Koeficijent linearne korelacijske populacije

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

σ_x – standardna devijacija varijable X u populaciji,
 σ_y – standardna devijacija varijable Y u populaciji,
 σ_{xy} – kovarijanca populacije.

38. Koeficijent linearne korelacijske uzorka

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

s_x – standardna devijacija varijable X u uzorku,
 s_y – standardna devijacija varijable Y u uzorku,
 s_{xy} – kovarijanca uzorka.

4

Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti

1. Klasična definicija vjerojatnosti

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

M – broj povoljnih ishoda (broj načina na koji se ostvaruje događaj A),
 N – broj jednakovjerojatnih ishoda slučajnog eksperimenta ($N < \infty$).

2. Statistička definicija vjerojatnosti

$$P(A) = p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(A)}{n}$$

m – broj nastupa događaja A u n ponavljanja slučajnog eksperimenta,
 n – broj ponavljanja slučajnog eksperimenta.

3. Aditivni zakon (događaji koji se međusobno isključuju)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

4. Aditivni zakon (događaji koji se međusobno ne isključuju)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. Multiplikativni zakon (međusobno nezavisni događaji)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

6. Multiplikativni zakon (međusobno zavisni događaji)

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

7. Komplementarnost

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

8. Pravilo uvjetne vjerojatnosti događaja A ako se dogodio događaj B (međusobno nezavisni događaji)

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

9. Pravilo uvjetne vjerojatnosti događaja A ako se dogodio događaj B (međusobno zavisni događaji)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

10. Bayesov teorem

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)}$$
$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$$

$$P(B_i \cap B_j) = 0 \text{ za svaki } i \neq j$$

5.

Slučajne varijable i distribucije vjerojatnosti

1. Očekivana vrijednost diskretne slučajne varijable X

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i)$$
$$E(X) = \mu$$

2. Očekivana vrijednost kontinuirane slučajne varijable X

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$
$$E(X) = \mu$$

3. Varijanca diskretne slučajne varijable X

$$Var(X) = E(X - \mu)^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i)$$
$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \sum_i x_i^2 p(x_i) - \mu^2$$

4. Varijanca kontinuirane slučajne varijable X

$$Var(X) = E(X - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$
$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$$

5. Uvjetna funkcija gustoće vjerojatnosti (uvjetna vjerojatnost da varijabla X poprimi vrijednost x , ako je varijabla Y poprimila vrijednost y)

$$p(x|y) = P(X = x | Y = y) = \frac{p(x,y)}{p(y)} = \frac{p(X = x, Y = y)}{p(Y = y)}$$

6. Očekivana vrijednost umnoška slučajnih varijabli X i Y

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy \cdot p(x, y)$$

7. Kovarijanca između slučajnih varijabli X i Y

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

8. Koeficijent linearne korelacije

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

9. Očekivana vrijednost portfelja

$$E(Y) = \sum_{i=1}^k \alpha_i E(X_i)$$

α_i – broj vrijednosnih papira A_i u portfelju.

10. Varijanca portfelja

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

$$\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sigma_i \sigma_j}$$

11. Binomna distribucija vjerojatnosti

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

n – broj pokušaja (broj ponavljanja eksperimenta),

x – broj uspjeha u n pokušaja,

p – vjerojatnost uspjeha u jednom pokušaju, $q = 1 - p$.

12. Očekivana vrijednost binomne distribucije

$$E(X) = np$$

13. Varijanca binomne distribucije

$$\text{Var}(X) = npq$$



14. Distribucija vjerojatnosti Poissonove slučajne varijable

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lambda > 0$$

15. Očekivana vrijednost Poissonove slučajne varijable

$$E(X) = \lambda$$

16. Varijanca Poissonove slučajne varijable

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

17. Hipergeometrijska distribucija

$$P(x) = \frac{\binom{m}{x} \cdot \binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

N – veličina populacije,

x – broj uspjeha u n pokušaja,

n – broj pokušaja,

m – broj uspjeha u populaciji $m \leq N$,

$n - x$ – broj neuspjeha u n pokušaja.

18. Normalna distribucija (funkcija gustoće)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < \mu < \infty \quad \text{i} \quad \sigma > 0$$

$e = 2,71828$,

$\pi = 3,14159$.

19. Očekivana vrijednost normalne distribucije

$$E(X) = \mu$$

20. Varijanca normalne distribucije

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

21. Koeficijent asimetrije normalne distribucije

$$\alpha_3 = 0$$

22. Koeficijent zaobljenosti normalne distribucije

$$\alpha_4 = 3$$

23. Standardizirana normalna distribucija

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad -\infty < z < \infty$$

24. Očekivana vrijednost standardizirane normalne distribucije

$$E(z) = 0$$

25. Varijanca standardizirane normalne distribucije

$$\text{Var}(z) = 1$$

26. Kontinuirana uniformna distribucija (funkcija gustoće vjerojatnosti)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0 & x < a, x > b \end{cases}$$

27. Kontinuirana uniformna distribucija (funkcija distribucije)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & x > b \end{cases}$$

28. Očekivana vrijednost kontinuirane uniformne slučajne varijable

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

29. Varijanca kontinuirane uniformne slučajne varijable

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

30. Eksponencijalna distribucija (funkcija gustoće vjerojatnosti)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

31. Eksponencijalna distribucija (funkcija distribucije)

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t) dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

32. Očekivana vrijednost eksponencijalne distribucije

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

33. Varijanca eksponencijalne distribucije

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

6

Procjene i testovi hipoteza o parametrima jedne populacije

1. Procjena aritmetičke sredine populacije jednim brojem

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{n}$$

2. Intervalna procjena aritmetičke sredine populacije uz pouzdanost procjene $(1 - \alpha)$

Za uzorak izabran iz populacije s poznatom standardnom devijacijom: $\bar{x} \mp z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}}$,

Za uzorak izabran iz populacije s nepoznatom standardnom devijacijom: $\bar{x} \mp t_{\alpha/2}^{(n-1)} \sigma_{\bar{x}}$,

\bar{x} – aritmetička sredina uzorka (procjena aritmetičke sredine populacije jednim brojem),

$z_{\alpha/2}$ – koeficijent pouzdanosti procjene (z vrijednost jedinične normalne distribucije),

$t_{\alpha/2}^{(n-1)}$ – koeficijent pouzdanosti procjene (vrijednost t -distribucije),

$\sigma_{\bar{x}}$ – standardna pogreška procjene aritmetičke sredine populacije (standardna devijacija *sampling* distribucije aritmetičkih sredina).

3. Standardna pogreška procjene aritmetičke sredine

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \quad f = \frac{n}{N} < 0,05$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}; \quad f = \frac{n}{N} < 0,05$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}, \quad f = \frac{n}{N} \geq 0,05$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}, \quad f = \frac{n}{N} \geq 0,05$$

s – standardna devijacija uzorka,

σ – standardna devijacija populacije,

f – frakcija izbora,

$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ – faktor korekcije za konačne populacije.

4. Određivanje veličine uzorka za procjenu aritmetičke sredine populacije

Za beskonačnu populaciju:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{(ME)^2}.$$

Za konačnu populaciju:

$$n = \frac{\frac{z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{(ME)^2}}{1 + \frac{z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{N}}.$$

ME – granica pogreške jednaka polovini razlike donje i gornje granice intervala procjene (*Margin of Error*).

5. Procjena proporcije populacije jednim brojem

$$\hat{p} = \frac{m}{n}$$

\hat{p} – proporcija uzorka (procjena proporcije populacije jednim brojem),

m – broj jedinica u uzorku s traženim svojstvom,

n – veličina uzorka.

6. Intervalna procjena proporcije populacije uz pouzdanost procjene ($1 - \alpha$) (veliki uzorak)

$$\hat{p} \mp z_{\alpha/2} \sigma_{\hat{p}}$$

$\sigma_{\hat{p}}$ – standardna pogreška procjene proporcije (standardna devijacija sampling distribucije procjenitelja proporcije),

$z_{\alpha/2}$ – koeficijent pouzdanosti procjene (z -vrijednost jedinične normalne distribucije).

7. Standardna pogreška procjene proporcije

Uzorak izabran iz beskonačne populacije:

Uzorak izabran iz konačne populacije:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}.$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n} \left(\frac{N - n}{N - 1} \right)}.$$

8. Određivanje veličine uzorka za procjenu proporcije populacije

Za beskonačnu populaciju:

Za konačnu populaciju:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 [p(1 - p)]}{(ME)^2}.$$

$$n = \frac{\frac{z_{\alpha/2}^2 [p(1 - p)]}{(ME)^2}}{1 + \frac{z_{\alpha/2}^2 [p(1 - p)]}{N}}.$$

ME – granica pogreške jednaka polovini razlike donje i gornje granice intervala procjene (*Margin of Error*).

9. Procjena varijance populacije jednim brojem

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

10. Intervalna procjena varijance populacije (granice intervala procjene) uz pouzdanost procjene ($1 - \alpha$)

$$\frac{s^2(n-1)}{\chi_{\alpha/2; (n-1)}^2}, \quad \frac{s^2(n-1)}{\chi_{(1-\alpha/2); (n-1)}^2}$$

s^2 – procjena varijance populacije jednim brojem,

$\chi_{\alpha/2; (n-1)}^2$ – teorijska vrijednost hi-kvadrat distribucije za vjerojatnost $\alpha/2$ i $(n-1)$ stupnjeva slobode.

11. Standardna pogreška procjene varijance

$$\sigma_{s^2} = \sqrt{\frac{2\sigma^4}{n-1}}$$

12. Testiranje hipoteze o pretpostavljenoj vrijednosti aritmetičke sredine populacije

Vrsta testa	Nulta i alternativna hipoteza	Područje neodbacivanja nulte hipoteze	Područje odbacivanja nulte hipoteze
Dvosmjerni	$H_0 \dots \mu = \mu_0$ $H_1 \dots \mu \neq \mu_0$	$ z < z_{\alpha/2}$ $ t < t_{\alpha/2}^{(n-1)}$	$ z > z_{\alpha/2}$ $ t > t_{\alpha/2}^{(n-1)}$
Jednosmjerni na gornju granicu	$H_0 \dots \mu \leq \mu_0$ $H_1 \dots \mu > \mu_0$	$z < z_{\alpha}$ $t < t_{\alpha}^{(n-1)}$	$z > z_{\alpha}$ $t > t_{\alpha}^{(n-1)}$
Jednosmjerni na donju granicu	$H_0 \dots \mu \geq \mu_0$ $H_1 \dots \mu < \mu_0$	$z > -z_{\alpha}$ $t > -t_{\alpha}^{(n-1)}$	$z < -z_{\alpha}$ $t < -t_{\alpha}^{(n-1)}$

μ_0 – pretpostavljena aritmetička sredina populacije;

z – empirijski z -omjer $\left(z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$, odnosi se na test hipoteze o aritmetičkoj sredini populacije s poznatom standardnom devijacijom σ ,

z_{α} , $z_{\alpha/2}$ – teorijska vrijednost standardizirane normalne distribucije za vjerojatnost α , $\alpha/2$,

t – empirijski t -omjer $\left(t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$, odnosi se na test hipoteze o aritmetičkoj sredini populacije s nepoznatom standardnom devijacijom σ ,

t_{α}^{n-1} , $t_{\alpha/2}^{n-1}$ – teorijska vrijednost Studentove (t) distribucije za vjerojatnost α , $\alpha/2$ i $(n-1)$ stupnjeva slobode.

13. Empirijska razina signifikantnosti (p -vrijednost)

Vrsta testa	p -vrijednost	Područje neodbacivanja nulte hipoteze
Dvosmjerni test	p -vrijednost = $2P(Z > z)$	
Jednosmjerni test na gornju granicu	p -vrijednost = $P(Z > z)$	p -vrijednost > α
Jednosmjerni test na donju granicu	p -vrijednost = $P(Z > -z)$	

z – empirijski z -omjer,
 α – teorijska razina signifikantnosti.

14. Testiranje hipoteze o pretpostavljenoj proporciji populacije

Vrsta testa	Nulta i alternativna hipoteza	Područje neodbacivanja nulte hipoteze	Područje odbacivanja nulte hipoteze
Dvosmjerni test	$H_0 \dots p = p_0$ $H_1 \dots p \neq p_0$	$ z < z_{\alpha/2}$	$ z > z_{\alpha/2}$
Jednosmjerni test na gornju granicu	$H_0 \dots p \leq p_0$ $H_1 \dots p > p_0$	$z < z_{\alpha}$	$z > z_{\alpha}$
Jednosmjerni test na donju granicu	$H_0 \dots p \geq p_0$ $H_1 \dots p < p_0$	$z > -z_{\alpha}$	$z < -z_{\alpha}$

p_0 – pretpostavljena proporcija populacije,

z – empirijski z -omjer $\left(z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}} \right)$, odnosi se na test hipoteze o proporciji populacije za veliki uzorak ($n \geq 30$),
 z_{α} , $z_{\alpha/2}$ – teorijska vrijednost standardizirane normalne distribucije za vjerojatnost α , $\alpha/2$.

15. Standardna pogreška proporcije

Za beskonačne populacije ($n \ll N$):

Za konačne populacije:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}, \quad \sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n} \frac{N-n}{N-1}}.$$

16. Testiranje hipoteze o pretpostavljenoj varijanci populacije

Vrsta testa	Nulta i alternativna hipoteza	Područje neodbacivanja nulte hipoteze	Područje odbacivanja nulte hipoteze
Dvosmjerni test	$H_0 \dots \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 \dots \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2_{1-\alpha/2} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha/2}$	$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2};$ $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}$
Jednosmjerni test na gornju granicu	$H_0 \dots \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_1 \dots \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 < \chi^2_{\alpha}$	$\chi^2 > \chi^2_{\alpha}$
Jednosmjerni test na donju granicu	$H_0 \dots \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_1 \dots \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}$	$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$

χ^2 – test veličina $\left(\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \right)$,

$\chi^2_{1-\alpha/2}$ – teorijska vrijednost χ^2 -distribucije, dana za vjerojatnost $(1-\alpha/2)$ i $(n-1)$ stupnjeva slobode,

$\chi^2_{\alpha/2}$ – teorijska vrijednost χ^2 -distribucije, dana za vjerojatnost $\alpha/2$ i $(n-1)$ stupnjeva slobode.

7

Procjene i testovi hipoteza o parametrima dviju populacija

1. Procjena razlike aritmetičkih sredina dviju populacija jednim brojem (nezavisni uzorci)

$$\hat{D} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

\hat{D} – procjena razlike aritmetičkih sredina dviju populacija jednim brojem,

\bar{x}_1 – aritmetička sredina uzorka izabranog iz prve populacije,

\bar{x}_2 – aritmetička sredina uzorka izabranog iz druge populacije.

2. Intervalna procjena razlike aritmetičkih sredina dviju populacija (nezavisni uzorci) uz pouzdanost procjene $(1 - \alpha)$

Za uzorke izabrane iz populacija s poznatom standardnom devijacijom:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}.$$

Za uzorke izabrane iz populacija s nepoznatom standardnom devijacijom:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp t_{\alpha/2}^{(n_1+n_2-2)} \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}.$$

$z_{\alpha/2}$ – teorijska vrijednost standardizirane normalne distribucije za vjerojatnost $\alpha/2$,

$t_{\alpha/2}^{(n_1+n_2-2)}$ – teorijska vrijednost Studentove (t) distribucije za vjerojatnost $\alpha/2$ i $(n_1 + n_2 - 2)$ stupnjeva slobode,

$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ – standardna pogreška razlike aritmetičkih sredina.

3. Standardna pogreška razlike aritmetičkih sredina dviju populacija (nezavisni uzorci)

Za nezavisne uzorke izabrane iz populacija s poznatim varijancama:

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}.$$

Za nezavisne uzorke izabrane iz populacija s nepoznatim varijancama:

$$\sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}} = s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}.$$

s_p – zajednička standardna devijacija ($s_p = \sqrt{s_p^2}$).

4. Zajednička varijanca za nezavisne uzorke izabrane iz normalno distribuiranih populacija nepoznatih varijanci

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

5. Testiranje hipoteze o razlici aritmetičkih sredina dviju populacija (nezavisni uzorci)

Vrsta testa	Nulta i alternativna hipoteza	Područje neodbacivanja nulte hipoteze	Područje odbacivanja nulte hipoteze
Dvosmjerni test	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = D_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq D_0$	$ z < z_{\alpha/2}$ $ t < t_{\alpha/2}^{(n_1+n_2-2)}$	$ z > z_{\alpha/2}$ $ t > t_{\alpha/2}^{(n_1+n_2-2)}$
Jednosmjerni test na gornju granicu	$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq D_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 > D_0$	$z < z_{\alpha}$ $t < t_{\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$	$z > z_{\alpha}$ $t > t_{\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$
Jednosmjerni test na donju granicu	$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq D_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 < D_0$	$z > -z_{\alpha}$ $t > -t_{\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$	$z < -z_{\alpha}$ $t < -t_{\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$

D_0 – pretpostavljena razlika aritmetičkih sredina dviju populacija,

z – empirijski z -omjer $\left(z = \frac{\hat{D} - D_0}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}\right)$, odnosi se na test hipoteze o razlici aritmetičkih sredina dviju populacija s poznatim standardnim devijacijama σ_1 i σ_2 ,

z_{α} , $z_{\alpha/2}$ – teorijska vrijednost standardizirane normalne distribucije za vjerojatnost α , $\alpha/2$,

t – empirijski t -omjer $\left(t = \frac{\hat{D} - D_0}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}\right)$, odnosi se na test hipoteze o razlici aritmetičkih sredina dviju populacija s nepoznatim standardnim devijacijama σ_1 i σ_2 ,

$t_{\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$, $t_{\alpha/2}^{(n_1+n_2-2)}$ – teorijska vrijednost Studentove (t) distribucije za vjerojatnost α , $\alpha/2$ i $(n_1 + n_2 - 2)$ stupnjeva slobode.

6. Testiranje hipoteze o razlici aritmetičkih sredina dviju populacija (zavisni uzorci)

Vrsta testa	Nulta i alternativna hipoteza	Područje neodbacivanja nulte hipoteze	Područje odbacivanja nulte hipoteze
Dvosmjerni test	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = D_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq D_0$	$ z < z_{\alpha/2}$ $ t < t_{\alpha/2}^{(n-1)}$	$ z > z_{\alpha/2}$ $ t > t_{\alpha/2}^{(n-1)}$
Jednosmjerni test na gornju granicu	$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq D_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 > D_0$	$z < z_{\alpha}$ $t < t_{\alpha}^{(n-1)}$	$z > z_{\alpha}$ $t > t_{\alpha}^{(n-1)}$
Jednosmjerni test na donju granicu	$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq D_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 < D_0$	$z > -z_{\alpha}$ $t > -t_{\alpha}^{(n-1)}$	$z < -z_{\alpha}$ $t < -t_{\alpha}^{(n-1)}$

D_0 – pretpostavljena razlika aritmetičkih sredina dviju populacija,

z – empirijski z -omjer $\left(z = \frac{\hat{D} - D_0}{\frac{s_{\hat{D}}}{\sqrt{n}}}\right)$, odnosi se na test hipoteze o razlici aritmetičkih sredina

dviju populacija s poznatim standardnim devijacijama σ_1 i σ_2 ,
 z_α , $z_{\alpha/2}$ – teorijska vrijednost standardizirane normalne distribucije za vjerojatnost α , $\alpha/2$,

t – empirijski t -omjer $\left(t = \frac{\hat{D} - D_0}{\frac{s_{\hat{D}}}{\sqrt{n}}} \right)$, odnosi se na test hipoteze o razlici aritmetičkih sredina dviju populacija s nepoznatim standardnim devijacijama σ_1 i σ_2 ,

t_{α}^{n-1} , $t_{\alpha/2}^{n-1}$ – teorijska vrijednost Studentove (t) distribucije za vjerojatnost α , $\alpha/2$ i $(n-1)$ stupnjeva slobode.

7. Intervalna procjena razlike aritmetičkih sredina dviju populacija (zavisni uzorci)

$$\hat{D} \mp t_{(n-1), \alpha/2} \sigma_{\hat{D}}$$

\hat{D} – procjenitelj razlike sredina zavisnim uzorcima,

$t_{(n-1), \alpha/2}$ – teorijska vrijednost Studentove (t) distribucije za vjerojatnost $\alpha/2$ i $(n-1)$ stupnjeva slobode,

$\sigma_{\hat{D}}$ – standardna devijacija distribucije razlika vrijednosti dviju populacija.

8. Standardna devijacija distribucije razlika vrijednosti dviju populacija

$$\sigma_{\hat{D}} = \frac{s_{\hat{D}}}{\sqrt{n}}$$

$s_{\hat{D}}$ – standardna devijacija distribucije razlika vrijednosti zavisnih uzoraka $\left(s_{\hat{D}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \hat{D})^2}{n-1}} \right)$,

\hat{D} – procjenitelj razlike sredina zavisnim uzorcima $\left(\hat{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n} \right)$.

9. Procjena razlike proporcija dviju populacija jednim brojem (nezavisni uzorci)

$$\hat{D} = \hat{p}_1 - \hat{p}_2$$

\hat{p}_1 – proporcija prvog uzorka,
 \hat{p}_2 – proporcija drugog uzorka.

10. Intervalna procjena razlike proporcija dviju populacija (nezavisni uzorci)

$$\hat{D} \mp z_{\alpha/2} \sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}$$

$z_{\alpha/2}$ – teorijska vrijednost standardizirane normalne distribucije za vjerojatnost $\alpha/2$,

$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}$ – standardna pogreška razlike proporcija dviju populacija (veliki uzorci).

11. Standardna pogreška razlike proporcija dviju populacija (veliki uzorci)

$$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{n_2}}$$

12. Testiranje hipoteze o pretpostavljenoj razlici proporcija dviju populacija

Vrsta testa	Nulta i alternativna hipoteza	Područje neodbacivanja nulte hipoteze	Područje odbacivanja nulte hipoteze
Dvosmjerni test	$H_0 \dots p_1 - p_2 = D_0$ $H_1 \dots p_1 - p_2 \neq D_0$	$ z < z_{\alpha/2}$	$ z > z_{\alpha/2}$
Jednosmjerni test na gornju granicu	$H_0 \dots p_1 - p_2 \leq D_0$ $H_1 \dots p_1 - p_2 > D_0$	$z < z_{\alpha}$	$z > z_{\alpha}$
Jednosmjerni test na donju granicu	$H_0 \dots p_1 - p_2 \geq D_0$ $H_1 \dots p_1 - p_2 < D_0$	$z > -z_{\alpha}$	$z < -z_{\alpha}$

D_0 – pretpostavljena razlika proporcija dviju populacija,

$$z - \text{empirijski } z\text{-omjer} \left(z = \frac{\hat{D} - D_0}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}} \right),$$

$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}$ – standardna pogreška razlike proporcija dviju populacija za velike uzorke

$$\left(\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \right),$$

$$\hat{p} - \text{zajednička proporcija} \left(\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} \right),$$

z_{α} , $z_{\alpha/2}$ – teorijska vrijednost standardizirane normalne distribucije za vjerojatnost α , $\alpha/2$.

13. Testiranje hipoteze o jednakosti varijanci dviju normalno distribuiranih populacija

Vrsta testa	Nulta hipoteza	F -omjer	Područje neodbacivanja nulte hipoteze
Dvosmjerni test	$H_0 \dots \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 \dots \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	$F_{(1-\alpha/2)}^{(n_1-1); (n_2-1)} < F < F_{\alpha/2}^{(n_1-1); (n_2-1)}$
Jednosmjerni test na gornju granicu	$H_0 \dots \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $H_1 \dots \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	$F < F_{\alpha}^{(n_1-1); (n_2-1)}$
Jednosmjerni test na donju granicu	$H_0 \dots \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ $H_1 \dots \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	$F > F_{(1-\alpha)}^{(n_1-1); (n_2-1)}$

$F_{(1-\alpha/2)}^{(n_1-1); (n_2-1)}$, $F_{\alpha/2}^{(n_1-1); (n_2-1)}$ – kritična vrijednost F-distribucije dana za vjerojatnost $(1 - \alpha/2)$, $\alpha/2$ te $(n_1 - 1)$ stupnjeva slobode u brojniku i $(n_2 - 1)$ stupnjeva slobode u nazivniku.

8.

Korelacija i jednostavna linearna regresija

1. Kovarijanca

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}$$

2. Pearsonov koeficijent korelacije

$$r = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad 1 \leq r \leq 1$$
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2}}$$

3. Model populacije

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Pretpostavke modela:

$$e_i \sim N(0, \sigma^2), \quad \text{Cov}(e_i, e_j) = E(e_i e_j) = 0, \quad i \neq j.$$

4. Model uzorka s procijenjenim parametrima

$$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \hat{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

5. Regresijski model s procijenjenim parametrima

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

6. Procjene parametara metodom najmanjih kvadrata

a) Procjena regresijskog koeficijenta:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}.$$

b) Procjena konstantnog člana:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}.$$

7. Regresijske vrijednosti

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

8. Rezidualna odstupanja

$$\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

9. Relativna rezidualna odstupanja

$$\hat{e}_{i,rel} = \frac{\hat{e}_i}{y_i} 100$$

10. Standardizirana rezidualna odstupanja

$$\hat{e}_{i,sta} = \frac{\hat{e}_i}{\hat{\sigma}}$$

11. Intervalna procjena parametra β_1 uz razinu pouzdanosti $(1 - \alpha)$

$$P(\hat{\beta}_1 - t_{\alpha/2} \sigma_{\hat{\beta}_1} < \beta_1 < \hat{\beta}_1 + t_{\alpha/2} \sigma_{\hat{\beta}_1}) = (1 - \alpha)$$

$$\sigma_{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

$\sigma_{\hat{\beta}_1}$ – standardna pogreška procjene regresijskog koeficijenta,

$t_{\alpha/2}$ – vrijednost Studentove distribucije za pouzdanost $(1 - \alpha)$ i $(n - 2)$ stupnjeva slobode.

12. Intervalna procjena parametra β_0 uz razinu pouzdanosti $(1 - \alpha)$

$$P(\hat{\beta}_0 - t_{\alpha/2} \sigma_{\hat{\beta}_0} < \beta_0 < \hat{\beta}_0 + t_{\alpha/2} \sigma_{\hat{\beta}_0}) = (1 - \alpha)$$

$$\sigma_{\hat{\beta}_0} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

$\sigma_{\hat{\beta}_0}$ – standardna pogreška procjene konstantnog člana,

$t_{\alpha/2}$ – vrijednost Studentove distribucije za pouzdanost $(1 - \alpha)$ i $(n - 2)$ stupnja slobode.

13. Jednadžba analize varijance

$$ST = SP + SR$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$ST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2$$

$$SP = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n y_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{y}^2$$

$$SR = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

14. Tablica analize varijance (ANOVA) u modelu jednostavne linearne regresije

Izvor varijacije	Stupnjevi slobode	Zbroj kvadrata	Sredina kvadrata	F - omjer	Prob > F
Protumačen modelom linearne regresije	1	$SP = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$\frac{SP}{1}$	$\frac{SP}{\frac{1}{SR}} = \frac{n-2}{n-2}$	
Neprotumačen modelom linearne regresije	$n - 2$	$SR = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	$\frac{SR}{n-2}$		
Ukupno	$n - 1$	$ST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$			

15. Procjena varijance u modelu jednostavne linearne regresije

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2} = \frac{SR}{n-2}$$

16. Procjena standardne devijacije u modelu jednostavne linearne regresije

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{SR}{n-2}} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$$

17. Procjena koeficijenta varijacije u modelu jednostavne linearne regresije

$$\hat{V} = \frac{\hat{\sigma}}{\bar{y}} 100\%$$

18. Koeficijent determinacije

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{SP}{ST} = 1 - \frac{SR}{ST}, \quad 0 \leq R^2 \leq 1$$

19. Korigirani koeficijent determinacije

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-2}(1-R^2), \quad \bar{R}^2 \leq R^2$$

20. Koeficijent jednostavne linearne korelacije

$$R^2 \equiv r^2, \quad r = \pm \sqrt{R^2}$$

$$\text{sgn}(r) = \text{sgn}(\hat{\beta}_1)$$

21. Test značajnosti regresijskog koeficijenta t-test

Vrsta testa	Nulta i alternativna hipoteza	Područje neodbacivanja nulte hipoteze	Područje odbacivanja nulte hipoteze
Dvosmjerni test	$H_0 \dots \beta_1 = 0$ $H_1 \dots \beta_1 \neq 0$	$ t < t_{\alpha/2}^{(n-2)}$	$ t > t_{\alpha/2}^{(n-2)}$
Jednosmjerni test na gornju granicu	$H_0 \dots \beta_1 \leq 0$ $H_1 \dots \beta_1 > 0$	$t < t_{\alpha}^{(n-2)}$	$t > t_{\alpha}^{(n-2)}$
Jednosmjerni test na donju granicu	$H_0 \dots \beta_1 \geq 0$ $H_1 \dots \beta_1 < 0$	$t > -t_{\alpha}^{(n-2)}$	$t < -t_{\alpha}^{(n-2)}$

Test veličina:

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}}.$$

22. Empirijska razina signifikantnosti (p-vrijednost)

Vrsta testa	p -vrijednost	Područje neodbacivanja nulte hipoteze
Dvosmjerni test	$p\text{-vrijednost} = 2P(t_{n-2} > t)$	$p\text{-vrijednost} > \alpha$
Jednosmjerni test na gornju granicu	$p\text{-vrijednost} = P(t_{n-2} > t)$	
Jednosmjerni test na donju granicu	$p\text{-vrijednost} = P(t_{n-2} > t)$	

t_{n-2} je slučajna varijabla koja slijedi t -distribuciju s $(n-2)$ stupnja slobode.

23. *F-test značajnosti regresijskog koeficijenta u modelu jednostavne linearne regresije*

Hipoteze:

$$H_0 \dots y_i = \beta_0 + e_i$$

$$H_1 \dots y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i.$$

Test veličina:

$$F = \frac{\frac{SP}{1}}{\frac{SR}{n-2}}.$$

Odluka:

$$F > F_{\alpha,[1;(n-2)]} \implies H_1.$$

Donošenje odluke pomoću p -vrijednosti: p -vrijednost = $P(F_{(1;n-2)} > F)$:

$$p\text{-vrijednost} < \alpha \implies H_1.$$

$F_{(1;n-2)}$ je slučajna varijabla koja ima F -distribuciju s 1 stupnjem slobode u brojniku i $(n-2)$ stupnja slobode u nazivniku.

24. *Test hipoteze o pretpostavljenoj vrijednosti regresijskog koeficijenta*

Hipoteze:

Dvosmjerni test	Jednosmjerni test na gornju granicu	Jednosmjerni test na donju granicu
$H_0 \dots \beta_1 = \beta_1^*$ $H_1 \dots \beta_1 \neq \beta_1^*$	$H_0 \dots \beta_1 \leq \beta_1^*$ $H_1 \dots \beta_1 > \beta_1^*$	$H_0 \dots \beta_1 \geq \beta_1^*$ $H_1 \dots \beta_1 < \beta_1^*$

Test veličina:

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^*}{\sigma_{\hat{\beta}_1}}.$$

Vrsta testa	Nulta i alternativna hipoteza	Područje neodbacivanja nulte hipoteze	Područje odbacivanja nulte hipoteze
Dvosmjerni test	$H_0 \dots \beta_1 = \beta_0$ $H_1 \dots \beta_1 \neq \beta_0$	$ t < t_{\alpha/2}^{(n-2)}$	$ t > t_{\alpha/2}^{(n-2)}$
Jednosmjerni test na gornju granicu	$H_0 \dots \beta_1 \leq \beta_0$ $H_1 \dots \beta_1 > \beta_0$	$t < t_{\alpha}^{(n-2)}$	$t > t_{\alpha}^{(n-2)}$
Jednosmjerni test na donju granicu	$H_0 \dots \beta_1 \geq \beta_0$ $H_1 \dots \beta_1 < \beta_0$	$t > -t_{\alpha}^{(n-2)}$	$t < -t_{\alpha}^{(n-2)}$

25. *Test značajnosti koeficijenta linearne korelacije*

Hipoteze:

$$H_0 \dots \rho = 0$$

$$H_1 \dots \rho \neq 0.$$

Test veličina:

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}.$$

Način odlučivanja: nulta se hipoteza odbacuje ako je $|t| > t_{\alpha/2}^{(n-2)}$.

26. Test značajnosti koeficijenta determinacije

Hipoteze:

$$\begin{aligned} H_0 &\dots \rho^2 = 0 \\ H_1 &\dots \rho^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Test veličina:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\frac{SP}{1}}{\frac{SR}{n-2}} \\ F &= \frac{R^2(n-2)}{1-R^2}. \end{aligned}$$

Način odlučivanja: nulta se hipoteza odbacuje ako je $F > F_{\alpha, [1; (n-2)]}$.

27. Očekivana vrijednost zavisne varijable za zadanu vrijednost nezavisne varijable x_0

$$\hat{y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$$

28. Intervalna procjena očekivane vrijednosti zavisne varijable za zadanu vrijednost nezavisne varijable x_0 uz razinu pouzdanosti $(1 - \alpha)$

$$\begin{aligned} P(\hat{y}_0 - t_{\alpha/2} \sigma_{\hat{y}_0} < y_0 < \hat{y}_0 + t_{\alpha/2} \sigma_{\hat{y}_0}) &= (1 - \alpha) \\ \sigma_{\hat{y}_0} &= \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \end{aligned}$$

$\sigma_{\hat{y}_0}$ – standardna pogreška procjene očekivane vrijednosti zavisne varijable.

29. Prognostička vrijednost zavisne varijable za zadanu vrijednost nezavisne varijable x_f

$$\hat{y}_f = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_f$$

30. Intervalna procjena prognostičke vrijednosti zavisne varijable za zadanu vrijednost nezavisne varijable x_f uz razinu pouzdanosti $(1 - \alpha)$

$$\begin{aligned} P(\hat{y}_f - t_{\alpha/2} \sigma_{\hat{y}_f} < y_f < \hat{y}_f + t_{\alpha/2} \sigma_{\hat{y}_f}) &= (1 - \alpha) \\ \sigma_{\hat{y}_f} &= \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_f - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \end{aligned}$$

$\sigma_{\hat{y}_f}$ – standardna pogreška procjene prognostičke vrijednosti zavisne varijable.

9.

Višestruka linearna regresija

1. Model populacije

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_j x_{ij} + \dots + \beta_k x_{ik} + e_i, \\ i = 1, 2, \dots, n$$

2. Procijenjeni regresijski model

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \dots + \hat{\beta}_k x_k$$

3. Model višestruke linearne regresije procijenjen na osnovi standardiziranih vrijednosti varijabli

$$\hat{y}^* = \hat{\beta}_1^* x_1^* + \hat{\beta}_2^* x_2^* + \dots + \hat{\beta}_k^* x_k^*$$

Standardizirane vrijednosti ulaznih varijabli:

$$y_i^* = \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y} \\ x_{i1}^* = \frac{x_{i1} - \bar{x}_1}{\sigma_{x_1}} \\ x_{i2}^* = \frac{x_{i2} - \bar{x}_2}{\sigma_{x_2}}$$

4. Regresijske vrijednosti

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \dots + \hat{\beta}_k x_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

5. Rezidualna odstupanja

$$\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

6. Analiza varijance u modelu višestruke linearne regresije

$$ST = SP + SR$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

7. Tablica analize varijance (ANOVA) u modelu višestruke linearne regresije

Izvor varijacije	Stupnjevi slobode	Sume kvadrata	Sredine kvadrata	F - omjer	Prob > F
Protumačen modelom	k	SP	$\frac{SP}{k}$	$\frac{\frac{SP}{k}}{\frac{SR}{n-(k+1)}}$	
Neprotumačena odstupanja	$n - (k + 1)$	SR	$\frac{SR}{n - (k + 1)}$		
Ukupno	$n - 1$	ST			

8. Procjena varijance regresije

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SR}{n - (k + 1)}$$

9. Procjena standardne devijacije regresije

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{SR}{n - (k + 1)}}$$

10. Koeficijent determinacije

$$R^2 = \frac{SP}{ST} = 1 - \frac{SR}{ST} = 1 - \frac{[n - (k + 1)] \hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

11. Korigirani koeficijent determinacije

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n - 1}{n - (k + 1)} (1 - R^2) = 1 - \frac{n - 1}{n - (k + 1)} \cdot \frac{SR}{ST} = 1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\frac{ST}{n - 1}}$$

12. Korelacijska matrica

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{y1} & r_{y2} & \cdots & r_{yk} \\ r_{1y} & 1 & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ r_{2y} & r_{21} & 1 & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{ky} & r_{k1} & r_{k2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_{iy} = r_{yi} = \frac{\text{Cov}(x_i, y)}{\hat{\sigma}_{x_i}, \hat{\sigma}_y} \quad r_{ij} = r_{ji} = \frac{\text{Cov}(x_i, x_j)}{\hat{\sigma}_{x_i}, \hat{\sigma}_{x_j}} \quad i, j = 1, 2, \dots, k$$

13. Koeficijent multiple linearne korelacije

$$R = \sqrt{R^2}, \quad 0 \leq R \leq 1$$

14. Intervalne procjene parametara u modelu višestruke linearne regresije

$$P(\hat{\beta}_j - t_{\alpha/2} \sigma_{\hat{\beta}_j} < \beta_j < \hat{\beta}_j + t_{\alpha/2} \sigma_{\hat{\beta}_j}) = (1 - \alpha)$$

15. Testiranje hipoteza u modelu višestruke linearne regresije

Vrsta testa	Nulta i alternativna hipoteza	Područje neodbacivanja nulte hipoteze	Područje odbacivanja nulte hipoteze
Dvosmjerni test	$H_0: \beta_j = 0$ $H_1: \beta_j \neq 0$	$ t_j < t_{\alpha/2}^{(n-k-1)}$	$ t_j > t_{\alpha/2}^{(n-k-1)}$
Jednosmjerni test na gornju granicu	$H_0: \beta_j \leq 0$ $H_1: \beta_j > 0$	$t_j < t_{\alpha}^{(n-k-1)}$	$t_j > t_{\alpha}^{(n-k-1)}$
Jednosmjerni test na donju granicu	$H_0: \beta_j \geq 0$ $H_1: \beta_j < 0$	$t_j > -t_{\alpha}^{(n-k-1)}$	$t_j < -t_{\alpha}^{(n-k-1)}$

Test veličina:

$$t_j = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma_{\hat{\beta}_j}}.$$

16. Test o značajnosti svih regresorskih varijabli

Hipoteze:

$$\begin{aligned} H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0 \\ H_1: \exists \beta_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Test veličina:

$$F = \frac{\frac{SP}{k}}{\frac{SR}{n-(k+1)}}.$$

Odluka:

$$F > F_{\alpha(k; n-k-1)} \implies H_1.$$

17. Pokazatelji multikolinearnosti

Faktor inflacije varijance (Variance Inflation Factor – VIF):

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Tolerance (TOL):

$$TOL_j = \frac{1}{VIF_j} = 1 - R_j^2.$$

R_j^2 – koeficijent determinacije u modelu višestruke linearne regresije u kojem je j -ta regresorska varijabla zavisna, a preostale regresorske varijable nezavisne.

18. Durbin-Watsonov test

Hipoteze (dvosmjerni test):

$$\begin{aligned} H_0 : \rho &= 0 \\ H_1 : \rho &\neq 0. \end{aligned}$$

Hipoteze (test o pozitivnoj autokorelaciji):

$$\begin{aligned} H_0 : \rho &= 0 \\ H_1 : \rho &> 0. \end{aligned}$$

Hipoteze (test o negativnoj autokorelaciji):

$$\begin{aligned} H_0 : \rho &= 0 \\ H_1 : \rho &< 0. \end{aligned}$$

Test veličina:

$$\begin{aligned} DW &= \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2} \\ DW \equiv d &= \frac{\sum \hat{e}_t^2}{\sum \hat{e}_t^2} + \frac{\sum \hat{e}_{t-1}^2}{\sum \hat{e}_t^2} - 2 \frac{\sum \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum \hat{e}_t^2} \approx 2(1 - \hat{\rho}). \end{aligned}$$

Odluka (jednosmjerni test na gornju granicu $0 \leq d \leq 2$):

$$d < d_L \implies H_1$$

$d_L < d < d_U \implies$ Ne može se donijeti odluka.

$$d > d_U \implies H_0$$

Odluka (jednosmjerni test na donju granicu $2 \leq d \leq 4$):

$$d > 4 - d_L \implies H_1$$

$4 - d_U < d < 4 - d_L \implies$ Ne može se donijeti odluka.

$$d < 4 - d_U \implies H_0$$

d_L i d_U – kritične vrijednosti Durbin-Watsonova testa.

10.

Metode poslovne prognostike

1. Prve diferencije

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}, t = 2, 3, \dots, n$$

Δy – prva diferencija,
 y_t – vrijednost vremenskog niza u razdoblju t ,
 y_{t-1} – vrijednost vremenskog niza u razdoblju $t-1$.

2. Prosječna prva diferencija

$$\overline{\Delta y} = \frac{y_n - y_1}{n - 1}$$

$\overline{\Delta y}$ – prosječna prva diferencija,
 y_n – posljednja vrijednost vremenskog niza,
 y_1 – prva vrijednost vremenskog niza,
 n – broj članova vremenskog niza.

3. Pojedinačna stopa promjene

$$s_t = \frac{\Delta y_t}{y_{t-1}} 100, \quad t = 2, 3, \dots, n$$

s_t – pojedinačna stopa promjene,
 Δy_t – prva diferencija,
 y_{t-1} – vrijednost niza u vremenu $t-1$.

$$s_t = (v_t - 1)100, \quad t = 2, 3, \dots, n$$

$v_t = \frac{y_t}{y_{t-1}}$ – koeficijent dinamike u uzastopnim razdobljima.

$$s_t = V_t - 100, \quad t = 2, 3, \dots, n$$

$V_t = \frac{y_t}{y_{t-1}} 100$ – verižni indeks.

4. Prosječna stopa promjene

$$\bar{s} = (G - 1)100$$

\bar{s} – prosječna stopa promjene,

G – geometrijska sredina, $G = \sqrt[n-1]{v_2 v_3 \dots v_n} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$,

y_n – posljednja vrijednost vremenskog niza,
 y_1 – prva vrijednost vremenskog niza.

$$\bar{s} = \left(\sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} - 1 \right) 100$$

\bar{s} – prosječna stopa,
 y_n – posljednja vrijednost vremenskog niza,
 y_1 – prva vrijednost vremenskog niza.

$$\bar{s} = \left(\sqrt[n-1]{\frac{I_n}{I_1}} - 1 \right) 100$$

\bar{s} – prosječna stopa,
 I_n – posljednji bazni indeks niza,
 I_1 – prvi bazni indeks niza.

5. Prognoza na osnovi ustavljene prosječne stope

$$\hat{y}_{n+\tau} = y_n \cdot G^\tau$$

$\hat{y}_{n+\tau}$ – procijenjena vrijednost niza u vremenu $n + \tau$,
 y_n – posljednji član niza,
 G – geometrijska sredina,
 τ – broj razdoblja nakon posljednjeg za koje se provodi prognoza.

6. Pokazatelj dinamike u odnosu na bazno razdoblje izražen apsolutno

$$\Delta y_t* = y_t - y_b, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

Δy_t* – pokazatelj dinamike u odnosu na bazno razdoblje izražen apsolutno,
 y_t – vrijednost niza u vremenu t ,
 y_b – vrijednost niza u baznom razdoblju.

7. Pokazatelj dinamike u odnosu na bazno razdoblje izražen relativno

$$s_t* = \frac{y_t - y_b}{y_b} 100, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

s_t* – pokazatelj dinamike u odnosu na bazno razdoblje izražen relativno,
 y_t – vrijednost niza u vremenu t ,
 y_b – vrijednost niza u baznom razdoblju.

$$s_t* = I_t - 100$$

I_t – bazni indeks.

8. Indeks na stalnoj bazi (bazni indeks)

$$I_t = \frac{y_t}{y_b} \cdot 100, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

I_t – bazni indeks,
 y_t – vrijednost niza u vremenu t ,
 y_b – vrijednost niza u baznom razdoblju.

9. Verižni indeks

$$V_t = \frac{y_t}{y_{t-1}} \cdot 100, \quad t = 2, 3, \dots, n$$

V_t – verižni indeks,

y_t – vrijednost niza u vremenu t ,

y_{t-1} – vrijednost niza u vremenu $t - 1$.

10. Laspeyresov indeks cijena

$$P_{0t}(q_0) = \frac{\sum_{i=1}^k p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^k p_{i0} q_{i0}} \cdot 100$$

$P_{0t}(q_0)$ – Laspeyresov indeks cijena,

p_{i0} – cijena fiksног, bazнog razdoblja (0. razdoblje),

p_{it} – cijene izvještajnog razdoblja,

q_{i0} – količine bazнog razdoblja.

11. Paascheov indeks cijena

$$P_{0t}(q_t) = \frac{\sum_{i=1}^k p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^k p_{i0} q_{it}} \cdot 100$$

$P_{0t}(q_t)$ – Paascheov indeks cijena,

p_{i0} – cijena bazнog razdoblja (0. razdoblje),

p_{it} – cijene izvještajnog razdoblja,

q_{it} – količine tekućeg razdoblja.

12. Laspeyresov indeks količina

$$Q_{0t}(p_0) = \frac{\sum_{i=1}^k q_{it} p_{i0}}{\sum_{i=1}^k q_{i0} p_{i0}} \cdot 100$$

$Q_{0t}(p_0)$ – Laspeyresov indeks količina,

p_{i0} – cijena bazнog razdoblja (0. razdoblje),

q_{it} – količine izvještajnog razdoblja,

q_{i0} – količine bazнog razdoblja.

13. Paascheov indeks količina

$$Q_{0t}(p_t) = \frac{\sum_{i=1}^k q_{it} p_{it}}{\sum_{i=1}^k q_{i0} p_{it}} \cdot 100$$

$Q_{0t}(p_t)$ – Paascheov indeks količina,

q_{i0} – količina bazнog razdoblja (0. razdoblje),

p_{it} – cijene izvještajnog razdoblja,
 q_{it} – količine tekućeg razdoblja.

14. Indeks vrijednosti

$$V_{0t} = P_{0t}(q_0)Q_{0t}(P_t)$$

V_{0t} – indeks vrijednosti,
 $P_{0t}(q_0)$ – Laspeyresov indeks cijena,
 $Q_{0t}(P_t)$ – Paascheov indeks količina.

$$V_{0t} = P_{0t}(q_t)Q_{0t}(P_0)$$

V_{0t} – indeks vrijednosti,
 $P_{0t}(q_t)$ – Paascheov indeks cijena,
 $Q_{0t}(P_0)$ – Laspeyresov indeks količina.

15. Fischerov indeks cijena

$${}_F P_{0t} = \sqrt{P_{0t}(q_0)P_{0t}(q_t)}$$

${}_F P_{0t}$ – Fischerov indeks cijena,
 $P_{0t}(q_0)$ – Laspeyresov indeks cijena,
 $P_{0t}(q_t)$ – Paascheov indeks cijena.

16. Fischerov indeks količina

$${}_F Q_{0t} = \sqrt{Q_{0t}(p_0)Q_{0t}(p_t)}$$

${}_F Q_{0t}$ – Fischerov indeks količina,
 $Q_{0t}(p_0)$ – Laspeyresov indeks količina,
 $Q_{0t}(p_t)$ – Paascheov indeks količina.

17. Modificirana Laspeyresova formula za izračunavanje indeksa potrošačkih cijena (CPI)

$$I = \frac{\sum \frac{P_n}{P_0} \cdot W_0}{\sum W_0} \cdot 100$$

P_n – cijena u tekućem razdoblju,
 P_0 – cijena u baznom razdoblju,
 W_0 – relativna struktura vrijednosti prodaje u baznom razdoblju,
 I – indeks.

18. Deflacionirane vrijednosti

$$y_{adj_t} = \frac{y_t}{I_t} \cdot 100, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

y_{adj_t} – deflacionirana vrijednost vremenske serije u vremenu t ,
 y_t – stvarna vrijednost vremenske serije u vremenu t ,
 I_t – indeks (npr. CPI ili PPI) u vremenu t .

19. Prognostička pogreška

$$e_t = y_t - F_t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

e_t – prognostička pogreška,
 y_t – stvarna vrijednost u vremenu t ,

F_t – prognostička vrijednost u vremenu t ,
 T – broj parova stvarne vrijednosti i prognostičkih vrijednosti (broj pojedinačnih prognostičkih pogrešaka).

20. Prosječna prognostička pogreška (ME=Mean Error)

$$ME = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t$$

21. Prosječna apsolutna pogreška (MAE=Mean Absolute Error)

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |e_t|$$

22. Srednja kvadratna prognostička pogreška (MSE=Mean Squared Error)

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t^2$$

e_t – prognostička pogreška,
 T – broj parova stvarne vrijednosti i prognostičkih vrijednosti (broj pojedinačnih prognostičkih pogrešaka).

23. Korijen iz srednja kvadratne prognostičke pogreške (RMSE=Root Mean Square Error)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t^2}$$

e_t – prognostička pogreška,
 T – broj parova stvarne vrijednosti i prognostičkih vrijednosti (broj pojedinačnih prognostičkih pogrešaka).

24. Relativna ili postotna pogreška (PE=Percentage Error)

$$PE_t = \left(\frac{y_t - F_t}{y_t} \right) \cdot 100, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

25. Relativna postotna pogreška (MPE=Mean Percentage Error)

$$MPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T PE_t$$

26. Prosječna apsolutna postotna pogreška (MAPE=Mean Absolute Percentage Error)

$$MAPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |PE_t|$$

y_t – stvarna vrijednost u vremenu t ,
 F_t – prognostička vrijednost u vremenu t .

27. Naivni model I (status quo)

Prognostička vrijednost za jedno razdoblje nakon tekućeg:

$$F_{t+1} = y_t.$$

Prognostička vrijednost za τ razdoblja nakon tekućeg:

$$F_{t+\tau} = y_t, \quad \tau = 1, 2, \dots$$

y_t – stvarna vrijednost u vremenu t ,
 F_{t+1} – prognostička vrijednost u vremenu $t + 1$.

28. Naivni model II (status quo diferencije)

Prognostička vrijednost za jedno razdoblje nakon tekućeg:

$$F_{t+1} = y_t + (y_t - y_{t-1}).$$

Prognostička vrijednost za τ razdoblja nakon tekućeg:

$$F_{t+\tau} = y_t + \tau(y_t - y_{t-1}), \quad \tau = 1, 2, \dots$$

y_t – stvarna vrijednost u vremenu t ,
 F_{t+1} – prognostička vrijednost u vremenu $t + 1$,
 $F_{t+\tau}$ – prognostička vrijednost u vremenu $t + \tau$.

29. Naivni model III (status quo stope)

Prognostička vrijednost za jedno razdoblje nakon tekućeg:

$$F_{t+1} = y_t \left(\frac{y_t}{y_{t-1}} \right).$$

Prognostička vrijednost za τ razdoblja nakon tekućeg:

$$F_{t+\tau} = y_t \left(\frac{y_t}{y_{t-1}} \right)^\tau, \quad \tau = 1, 2, \dots$$

Prognostički izraz na bazi prosječne stope ili prepostavljene stope:

$$F_{n+\tau} = y_n G^\tau, \quad \tau = 1, 2, \dots$$

$$G = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$$

y_t – stvarna vrijednost u vremenu t ,
 F_{t+1} – prognostička vrijednost u vremenu $t + 1$,
 $F_{t+\tau}$ – prognostička vrijednost u vremenu $t + \tau$,
 G – geometrijska sredina.

30. Prognoziranje jednostavnom aritmetičkom sredinom

Prognošćka vrijednost za jedno razdoblje nakon tekućeg:

$$F_{t+1} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t y_i$$

F_{t+1} – prognošćka vrijednost u vremenu $t + 1$.

Prognošćka vrijednost za dva razdoblja nakon tekućeg:

$$F_{t+2} = \frac{1}{t+1} \sum_{i=1}^{t+1} y_i$$

F_{t+2} – prognošćka vrijednost u vremenu $t + 2$.

31. Prognoziranje pomičnim prosjecima

Prognošćka vrijednost za jedno razdoblje unaprijed:

$$F_{t+1} = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k+1}^t y_i$$

F_{t+1} – prognošćka vrijednost u vremenu $t + 1$.

Prognošćka vrijednost za jedno i za dva razdoblja nakon tekućeg:

$$F_{t+1} = \frac{y_t + y_{t-1} + \dots + y_{t-k+1}}{k}$$

$$F_{t+2} = \frac{y_{t+1} + y_t + \dots + y_{t-k+2}}{k}$$

y_t – stvarna vrijednost u vremenu t ,

F_{t+1} – prognošćka vrijednost u vremenu $t + 1$,

F_{t+2} – prognošćka vrijednost u vremenu $t + 2$.

Jednostavni pomični prosjeci:

$$\hat{y}_t = \frac{y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + \dots + y_{t-k+1}}{k}$$

\hat{y}_t – jednostavni pomični prosjek u vremenu t ,

k – broj članova pomičnog prosjeka.

32. Model jednostavnog eksponencijalnog izglađivanja

Model jednostavnog eksponencijalnog izglađivanja (polazna jednadžba):

$$y_t = \mu_t + e_t.$$

Jednadžba izglađivanja srednje razine:

$$F_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha) F_t$$

y_t – vrijednost vremenskog niza u vremenu t ,

μ_t – srednja razina pojave,

e_t – pogreška relacije ili rezidualna komponenta,

F_t – prognostička vrijednost u vremenu t ,

α – konstanta izglađivanja, ($0 < \alpha < 1$),

F_{t+1} – prognostička vrijednost u vremenu $t + 1$.

Prognostička vrijednost jedno razdoblje nakon tekućeg:

$$F_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha)F_t.$$

Prognostička vrijednost τ razdoblja nakon tekućeg:

$$F_{t+\tau} = \alpha y_t + (1 - \alpha)F_t, \quad \tau = 1, 2, \dots$$

y_t – vrijednost vremenskog niza u vremenu t ,

F_{t+1} – prognostička vrijednost u vremenu $t + 1$,

α – konstanta izglađivanja, ($0 < \alpha < 1$),

$F_{t+\tau}$ – prognostička vrijednost u vremenu $t + \tau$.

33. Holtov dvoparametarski model linearog eksponencijalnog izglađivanja

Procjena razine pojave u vremenu t :

$$F_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(F_{t-1} + T_{t-1}).$$

Procjena trenda u vremenu t :

$$T_t = \gamma(F_t - F_{t-1}) + (1 - \gamma)T_{t-1}.$$

Prognostička vrijednost:

$$F_{t+\tau} = F_t + T_t \tau$$

y_t – vrijednost vremenskog niza u vremenu t ,

F_t – procjena razine pojave u vremenu t ,

α – konstanta izglađivanja, ($0 < \alpha < 1$),

γ – konstanta izglađivanja trenda, ($0 < \gamma < 1$),

T_t – procjena trenda u vremenu t ,

$F_{t+\tau}$ – prognostička vrijednost u vremenu $t + \tau$.

34. Holt–Wintersov multiplikativni model eksponencijalnog izglađivanja

Procjena razine pojave u vremenu t :

$$L_t = \alpha \frac{y_t}{S_{t-s}} + (1 - \alpha)(L_{t-1} + b_{t-1}).$$

Procjena trenda u vremenu t :

$$b_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}.$$

Procjena sezonskog utjecaja u vremenu t :

$$S_t = \gamma \frac{y_t}{L_t} + (1 - \gamma)S_{t-s}.$$

Prognostička vrijednost za m razdoblja unaprijed:

$$F_{t+m} = (L_t + b_t m)S_{t-s+m}$$

L_t – razina pojave u vremenu t ,
 s – duljina sezonskog perioda (npr. broj mjeseci ili kvartala u godini),
 α – konstanta izglađivanja srednje razine pojave, ($0 < \alpha < 1$),
 b_t – procjena trenda u vremenu t ,
 β – konstanta izglađivanja trend komponente, ($0 < \beta < 1$),
 S_t – procjena sezonske komponente u vremenu t ,
 γ – konstanta izglađivanja sezonske komponente, ($0 < \gamma < 1$),
 F_{t+m} – prognostička vrijednost za m razdoblja unaprijed.

35. Holt-Wintersov aditivni model eksponencijalnog izglađivanja

Procjena razine pojave u vremenu t :

$$L_t = \alpha(y_t - S_{t-s}) + (1 - \alpha)(L_{t-1} + b_{t-1}).$$

Procjena trenda u vremenu t :

$$b_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}.$$

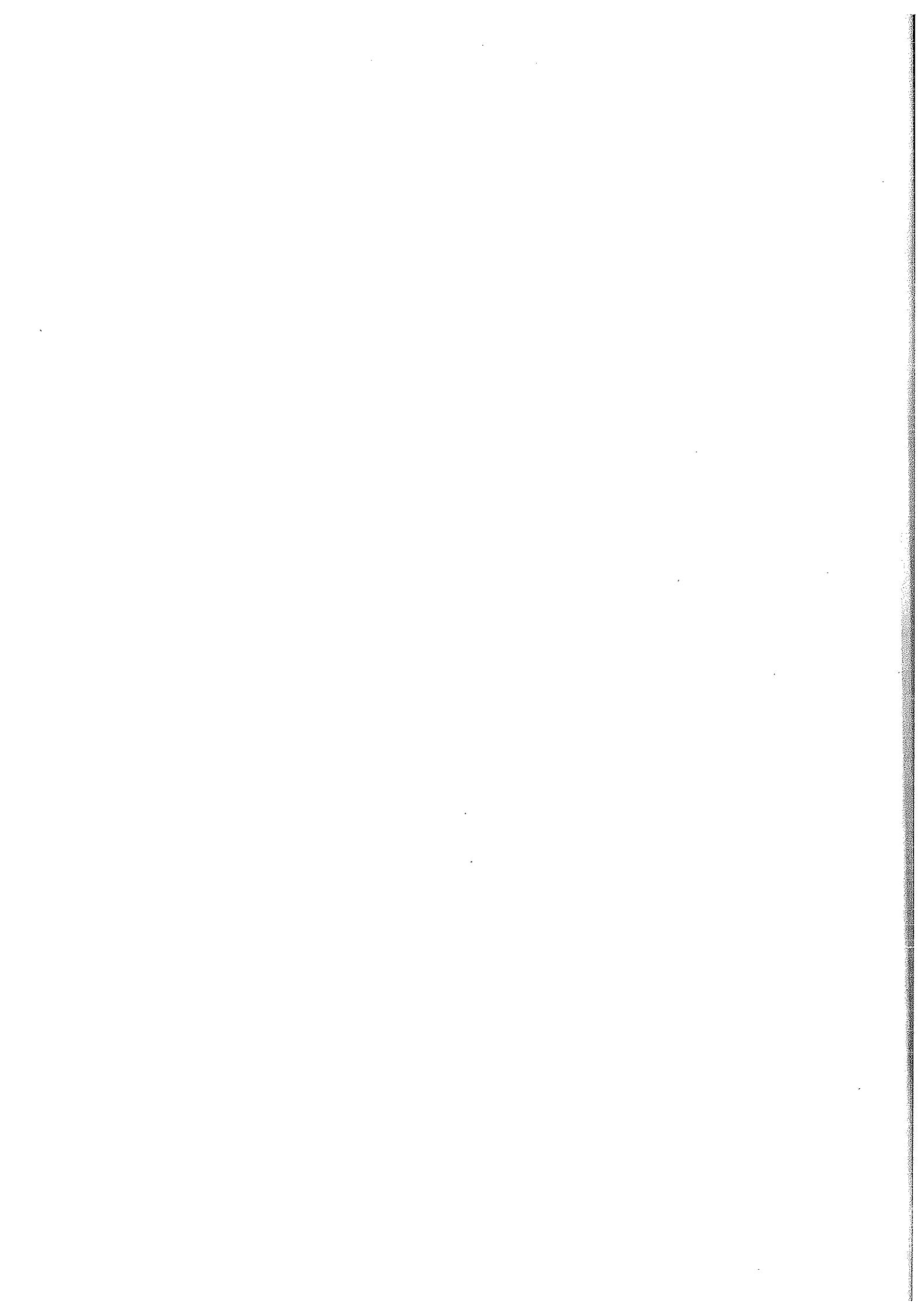
Procjena sezonskog utjecaja u vremenu t :

$$S_t = \gamma(y_t - L_t) + (1 - \gamma)S_{t-s}.$$

Prognostička vrijednost za m razdoblja unaprijed:

$$F_{t+m} = L_t + b_t m + S_{t-s+m}$$

L_t – razina pojave u vremenu t ,
 s – duljina sezonskog perioda (npr. broj mjeseci ili kvartala u godini),
 α – konstanta izglađivanja srednje razine pojave, ($0 < \alpha < 1$),
 b_t – procjena trenda u vremenu t ,
 β – konstanta izglađivanja trend komponente, ($0 < \beta < 1$),
 S_t – procjena sezonske komponente u vremenu t ,
 γ – konstanta izglađivanja sezonske komponente, ($0 < \gamma < 1$),
 F_{t+m} – prognostička vrijednost za m razdoblja unaprijed.



11

Metode statističke kontrole kvalitete

1. \bar{x} -karta

Prosječna vrijednost odnosno aritmetička sredina:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

x_i – vrijednost opažanja u pojedinoj podgrupi/uzorku,
 n – broj opažanja u podgrupi/uzorku.

Prosječna vrijednost aritmetičkih sredina:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{x}_i}{k}$$

\bar{x}_i – prosječna vrijednost i -te podgrupe/uzorka,
 k – broj podgrupa/uzoraka.

Kritične kontrolne granice za konstruiranje \bar{x} -karte, poznata σ :

$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + z\sigma_{\bar{x}}, \quad LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - z\sigma_{\bar{x}}$$

$UCL_{\bar{x}}$ – gornja kritična kontrolna granica,

$LCL_{\bar{x}}$ – donja kritična kontrolna granica,

$\bar{\bar{x}}$ – prosječna vrijednost aritmetičkih sredina podgrupa/uzoraka (centralna linija \bar{x} -karte),

z – standardizirana normalna varijabla,

$\sigma_{\bar{x}}$ – standardna devijacija distribucije aritmetičkih sredina uzoraka, izračunana kao $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

σ – poznata standardna devijacija populacije,

n – veličina uzorka (broj opažanja po uzorku).

Kritične kontrolne granice za konstruiranje \bar{x} -karte, nije poznata σ :

$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_2(\bar{R}), \quad LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_2(\bar{R})$$

$UCL_{\bar{x}}$ – gornja kritična kontrolna granica,

$LCL_{\bar{x}}$ – donja kritična kontrolna granica,

$\bar{\bar{x}}$ – prosječna vrijednost aritmetičkih sredina podgrupa/uzoraka (centralna linija \bar{x} -karte),

A_2 – tablična vrijednost Shewhartova faktora za određenu veličinu podgrupe/uzorka koja se upotrebljava u slučaju kada standardna devijacija procesa populacije nije poznata,

\bar{R} – prosječna vrijednost raspona varijacije podgrupa/uzoraka.

2. R -karta

Raspon varijacije pojedine podgrupe/uzorka:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

x_{\max} – maksimalna (najveća) vrijednost u podgrupi/uzorku,

x_{\min} – minimalna (najmanja) vrijednost u podgrupi/uzorku.

Prosječna vrijednost raspona varijacije podgrupa/uzoraka (centralna linija R -karte):

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^k R_i}{k}$$

R_i – raspon varijacije i -te podgrupe/uzorka,

k – broj podgrupa/uzoraka.

Kritične kontrolne granice za konstruiranje R -karte:

$$UCL_R = D_4(\bar{R})$$

$$LCL_R = D_3(\bar{R})$$

UCL_R – gornja kritična kontrolna granica,

LCL_R – donja kritična kontrolna granica,

D_3 i D_4 – tablična vrijednost Shewhartova faktora za određenu veličinu podgrupe/uzorka,

\bar{R} – prosječna vrijednost raspona varijacije podgrupa/uzoraka.

3. p -karta

Prosječna vrijednost proporcije podgrupa/uzoraka (veličine podgrupa/uzoraka iste su veličine):

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k p_i}{k}$$

p_i – proporcija i -te podgrupe/uzorka,

k – broj podgrupa/uzoraka veličine n .

Prosječna vrijednost proporcije podgrupa/uzoraka (veličine podgrupa/uzoraka nisu jednake veličine):

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i p_i}{\sum_{i=1}^k n_i}$$

p_i – proporcija i -te podgrupe/uzorka,

n_i – veličina i -te podgrupe/uzorka,

k – broj podgrupa/uzoraka veličine n .

Procjena standardne pogreške proporcije (veličine podgrupa/uzoraka iste su veličine):

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

\bar{p} – prosječna vrijednost proporcije podgrupa/uzoraka (centralna linija p -karte),

n – veličina podgrupe/uzorka.

Kritične kontrolne granice za konstruiranje p -karte:

$$UCL_p = \bar{p} + z\hat{\sigma}_p$$

$$LCL_p = \bar{p} - z\hat{\sigma}_p$$

UCL_p – gornja kritična kontrolna granica,
 LCL_p – donja kritična kontrolna granica,
 \bar{p} – prosječna vrijednost proporcije podgrupa/uzoraka (centralna linija),
 z – vrijednost standardizirane normalne varijable (najčešće $z = 3$),
 $\hat{\sigma}_p$ – procjena standardne pogreške proporcije podgrupa/uzoraka.

4. c -karta

Prosječan broj pogrešaka po podgrupi/uzorku (centralna linija c -karte):

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i}{k}$$

\bar{c} – prosječan broj pogrešaka po podgrupi/uzorku,
 c_i – broj pogrešaka u i -toj podgrupi/uzorku,
 k – broj podgrupa/uzoraka.

Procjena standardne pogreške procesa za prosječan broj pogrešaka:

$$\hat{\sigma}_c = \sqrt{\bar{c}}.$$

Kritične kontrolne granice za konstruiranje c -karte:

$$UCL_c = \bar{c} + z\hat{\sigma}_c$$

$$LCL_c = \bar{c} - z\hat{\sigma}_c$$

\bar{c} – prosječan broj pogrešaka po podgrupi/uzorku (centralna linija c -karte),
 z – vrijednost standardizirane normalne varijable (najčešće $z = 3$),
 $\hat{\sigma}_c$ – procjena standardne pogreške procesa za prosječan broj pogrešaka.

5. Indeks sposobnosti procesa, C_p (omjer sposobnosti)

Indeks sposobnosti procesa:

$$C_p = \frac{\text{raspon specifikacije}}{\text{raspon varijabilnosti procesa}} = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

USL – gornja granica specifikacije procesa,
 LSL – donja granica specifikacije procesa,
 σ – standardna devijacija distribucije procesa izračunana na temelju uzorka i najčešće je procijenjena sa s .

Parcijalni indeksi sposobnosti procesa:

$$CPL = \frac{\bar{x} - LSL}{3\sigma}$$

$$CPU = \frac{USL - \bar{x}}{3\sigma}$$

CPU – gornja jednosmjerna granica specifikacije,
 CPL – donja jednosmjerna granica specifikacije,

USL – gornja granica specifikacije procesa,

LSL – donja granica specifikacije procesa,

\bar{x} – aritmetička sredina uzorka,

σ – standardna devijacija procesa izračunana na temelju uzorka i najčešće je procijenjena sa s .

Indeks sposobnosti C_{pk} :

$$C_{pk} = \min\{CPU, CPL\} = \min \left\{ \frac{USL - \bar{x}}{3\sigma}, \frac{\bar{x} - LSL}{3\sigma} \right\}$$

CPU – gornja jednosmjerna granica specifikacije,

CPL – donja jednosmjerna granica specifikacije,

USL – gornja granica specifikacije procesa,

LSL – donja granica specifikacije procesa,

\bar{x} – aritmetička sredina uzorka,

σ – standardna devijacija procesa izračunana na temelju uzorka i najčešće je procijenjena sa s .

12.

Uvod u statističku analizu odlučivanja

31/21
(2/2)

1. Maximax kriterij

Odluka: a_k ako je $\max_j \left(\max_i c_{ij} \right) = \max_i c_{ik}$

c_{ij} – vrijednost varijable cilja za stanje okoline s_i i akciju a_j .

2. Maximin kriterij

Odluka: a_k ako je $\max_j \left(\min_i c_{ij} \right) = \min_i c_{ik}$

c_{ij} – vrijednost varijable cilja za stanje okoline s_i i akciju a_j .

3. Minimax kriterij

Odluka: a_k ako je $\min_j \left(\max_i o_{ij} \right) = \max_i o_{ik}$

o_{ij} – propuštena dobit (opportunitetni trošak) za stanje okoline s_i i akciju a_j ($o_{ij} = |c_i^* - c_{ij}|$),

c_i^* – financijski efekt najbolje akcije pri stanju s_i .

4. Kriterij očekivane novčane vrijednosti

$$EV(a_j) = \sum_{i=1}^m c_{ij} \cdot P(s_i) \quad j = 1, 2, \dots$$

c_{ij} – vrijednost varijable cilja za stanje okoline s_i i akciju a_j ,

$P(s_i)$ – vjerojatnost nastupanja stanja okoline s_i ,

EV = Expected Value.

5. Kriterij očekivane propuštene dobiti

$$EOL(a_j) = \sum_{i=1}^m o_{ij} \cdot P(s_i) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

o_{ij} – propuštena dobit (opportunitetni trošak) za stanje okoline s_i i akciju a_j

a_j ($o_{ij} = |c_i^* - c_{ij}|$),

c_i^* – financijski efekt najbolje akcije pri stanju s_i ,

EOL = Expected Opportunity Loss.

6. Hurwitzov kriterij odlučivanja

Na temelju očekivane novčane vrijednosti:

$$EV^*(a_j) = \max_i c_{ij} \cdot K + \min_i c_{ij} \cdot (1 - K).$$

$EV = \text{Expected Value}$.

Na temelju očekivane propuštenе dobiti:

$$EOL^*(a_j) = \min_i o_{ij} \cdot K + \max_i o_{ij} \cdot (1 - K)$$

K – koeficijent optimizma, $0 \leq K \leq 1$,
 $EOL = \text{Expected Opportunity Loss}$.

7. Laplaceov kriterij odlučivanja

$$EV(a_j) = \sum_{i=1}^m c_{ij} \cdot P(s_i) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

c_{ij} – vrijednost varijable cilja za stanje okoline s_i i akciju a_j ,

$P(s_i)$ – vjerojatnost nastupanja stanja okoline s_i $\left(P(s_i) = \frac{1}{m}, \forall i = 1, 2, \dots, m \right)$,

$EV = \text{Expected Value}$.

8. Kriterij očekivane korisnosti

$$EU(a_j) = \sum_{i=1}^m u_{ij} \cdot P(s_i) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

u_{ij} – korisnost za stanje okoline s_i i akciju a_j ,

$P(s_i)$ – vjerojatnost nastupanja stanja okoline s_i ,

$EU = \text{Expected Utility}$.

9. Očekivana vrijednost u uvjetima izvjesnosti

$$EVUC = \sum_{i=1}^m \max_j c_{ij} \cdot P(s_i)$$

c_{ij} – vrijednost varijable cilja za stanje okoline s_i i akciju a_j ;

$P(s_i)$ – vjerojatnost nastupanja stanja okoline s_i ,

$EVUC = \text{Expected Value Under Certainty}$.

10. Očekivana vrijednost potpune informacije

$$EVPI = EVUC - \max_j EV(a_j)$$

$EV(a_j)$ – očekivana novčana vrijednost akcije a_j ,

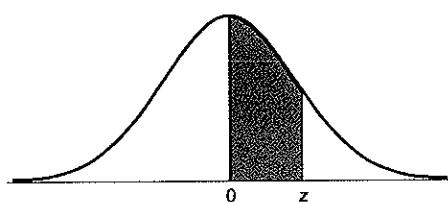
$EVPI = \text{Expected Value of Perfect Information}$,

$EVUC = \text{Expected Value Under Certainty}$.

Statističke tablice

Tablica 1. Površine ispod normalne krivulje

$$f(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$



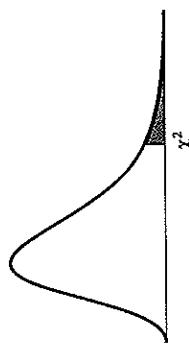
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995

Tablica 2. Kritične vrijednosti Studentove t -distribucije

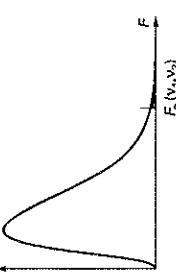
$$f(z) = \int_{t_\alpha}^{\infty} f(t) dt$$

df	$t_{0,100}$	$t_{0,050}$	$t_{0,025}$	$t_{0,010}$	$t_{0,005}$
1	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567
2	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248
3	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409
4	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041
5	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321
6	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995
8	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498
10	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693
11	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768
15	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467
16	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609
20	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453
21	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314
22	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188
23	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073
24	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874
26	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787
27	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500

Tablica 3. Kritične vrijednosti χ^2 -distribucije

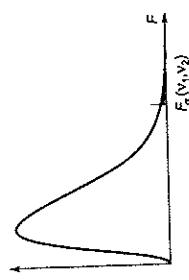


Supnjevi slobode	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,750	0,500	0,250	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1	0,00004	0,00016	0,00098	0,01579	0,10153	0,45494	1,32330	2,70554	3,84146	5,02389	6,63490	7,87944	
2	0,01003	0,02010	0,05064	0,10259	0,57536	1,38629	2,77259	4,60517	5,99146	7,37776	9,21034	10,59663	
3	0,07172	0,11483	0,21580	0,35185	0,58437	1,21253	2,36597	4,10834	6,25139	7,81473	9,34840	11,34487	12,83816
4	0,20699	0,29711	0,48442	0,71072	1,06362	1,92256	3,35669	5,38527	7,77944	9,48773	11,14329	13,27670	14,86026
5	0,41174	0,55430	0,83121	1,14548	1,61031	2,67460	4,35146	6,62568	9,23636	11,07050	12,83250	15,08627	16,74960
6	0,67573	0,87209	1,23734	1,63538	2,20413	3,45460	5,34812	7,84080	10,64464	12,59159	14,44938	16,81189	18,54758
7	0,98926	1,23904	1,68987	2,16735	2,83311	4,25485	6,34581	9,03715	12,01704	14,06714	16,01276	18,47531	20,27774
8	1,34441	1,64650	2,17973	2,73264	3,48954	5,07064	7,34412	10,21885	13,36157	15,50731	17,53455	20,09024	21,95495
9	1,73493	2,08790	2,70039	3,32511	4,16816	5,89883	8,34283	11,38875	14,68366	16,91898	19,02277	21,66599	23,58935
10	2,15586	2,55821	3,24697	3,94030	4,86518	6,73720	9,34182	12,54886	15,98718	18,30704	20,48318	23,20925	25,18818
11	2,60322	3,05348	3,81575	4,57481	5,57778	7,58414	10,34100	13,70069	17,27501	19,67514	21,92005	24,72497	26,75685
12	3,07382	3,57057	4,40379	5,22603	6,30380	8,43842	11,34032	14,84540	18,54935	21,02607	23,36666	26,21697	28,29952
13	3,56503	4,10692	5,00875	5,89186	7,04150	9,29907	12,33976	15,98391	19,81193	22,36203	24,73560	27,68825	29,81947
14	4,07467	4,66043	5,62873	6,57063	7,78953	10,16531	13,33927	17,11693	21,06414	23,68479	26,11895	29,14124	31,31935
15	4,60092	5,22935	6,26214	7,26094	8,54676	11,03654	14,33886	18,24509	22,30713	24,99579	27,48839	30,57791	32,80132
16	5,14221	5,81221	6,90766	7,96165	9,31224	11,91222	15,33850	19,36886	23,54183	26,29623	28,84535	31,99993	34,26719
17	5,69722	6,40776	7,56419	8,67176	10,08519	12,79193	16,33818	20,48868	24,76904	27,58711	30,19101	33,40866	35,71847
18	6,26480	7,01491	8,23075	9,30946	10,86494	13,67529	17,33790	21,60489	25,98942	28,86930	31,52638	34,80531	37,15645
19	6,84397	7,63273	8,90652	10,11701	11,65091	14,56200	18,33765	22,71781	27,20357	30,14353	32,85233	36,19087	38,58226
20	7,43384	8,26040	9,59078	10,85081	12,44261	15,45177	19,33743	23,82769	28,41198	31,41043	34,16961	37,56623	39,99685
21	8,03365	8,89720	10,28290	11,59131	13,23960	16,34438	20,33723	24,93478	29,61509	32,67057	35,47888	38,93217	41,40106
22	8,64272	9,54249	10,98232	12,3801	14,04149	17,23962	21,33705	26,03927	30,81328	33,92444	36,78071	40,28936	42,79565
23	9,26042	10,19572	11,68855	13,09051	14,84796	18,13730	22,33688	27,14134	32,00690	35,17246	38,07563	41,63840	44,18128
24	9,88623	10,85636	12,40115	13,84843	15,65868	19,03725	23,33673	28,24115	33,19624	36,41503	39,36408	42,97982	45,55851
25	10,51965	11,52398	13,11972	14,61141	16,47341	19,93934	24,33659	29,33885	34,38159	37,65248	40,64647	44,31410	46,92789
26	11,16024	12,19815	13,84391	15,37916	17,29189	20,84343	25,33646	30,43457	35,56317	38,88514	41,92317	45,64168	48,28988
27	11,80759	12,87850	14,57338	16,15140	18,11390	21,74941	26,33634	31,52841	36,74122	40,11327	43,19451	46,96294	49,64492
28	12,46134	13,56471	15,30786	16,92788	18,93924	22,65716	27,33623	32,62049	37,91592	41,33714	44,46079	48,27824	50,99338
29	13,12115	14,25645	16,04707	17,70837	19,76774	23,56659	28,33613	33,71091	39,08747	42,55697	45,72229	49,58788	52,33562
30	13,78672	14,95346	16,79077	18,49266	20,59923	24,47761	29,33603	34,79974	40,25602	43,77297	46,97924	50,89218	53,67196



Tablica 4. Kritične vrijednosti F -distribucije, razina signifikantnosti 5%

1	2	Stupnjevi slobode za brojnik												Stupnjevi slobode za nazivnik					
		3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	1000	
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,2
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,49	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,37
6	5,59	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,41
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,32	2,27	2,22	2,18	2,14
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,97
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,85
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82
22	4,30	3,34	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,74
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,72
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,25	2,22	2,15	2,09	2,07	1,99	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,68
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,66
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,63
31	4,16	3,31	2,91	2,68	2,52	2,41	2,32	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
32	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53
33	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,40
34	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,27
35	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,76	1,68	1,58	1,53	1,47	1,41	1,33	1,24	1,11



Tablica 5. Kritične vrijednosti F -distribucije, razina signifikantnosti 1%

Stupnjevi slobode za brojnik											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6059	6106	6157
1	2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,36	99,37	99,39	99,40	99,43
2	3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,67	27,91	27,35	27,23	27,05
3	4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37
4	5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05
5	6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87
6	7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62
7	8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81
8	9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
9	10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	12	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
13	14	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
15	16	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10
17	18	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94
19	20	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
21	22	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69
23	24	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59
25	26	8,02	5,72	4,82	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51
27	28	7,88	5,66	4,76	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43
29	30	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
31	32	7,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31
33	34	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26
35	36	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,41
37	38	5,66	4,76	4,26	4,07	3,75	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30
39	40	7,88	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17
41	42	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13
43	44	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09
45	46	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06
47	48	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03
49	50	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00
51	52	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98
53	54	7,51	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80
55	56	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,95	2,82	2,72
57	58	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,96	2,79	2,66	2,56
59	60	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,95	2,79	2,66	2,53	2,43
61	62	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,33
63	64	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,33

Tablica 6. Kritične vrijednosti Durbin–Watsonova testa, razina signifikantnosti 5%

Napomena: veličina K – broj nezavisnih varijabli u modelu

Veličina uzorka	$K = 1$		$K = 2$		$K = 3$		$K = 4$		$K = 5$	
	d_L	d_U								
6	0,61018	1,40015	0,46723	1,89636	0,36744	2,28664	0,29571	2,55810	—	—
7	0,69955	1,35635	0,55907	1,77711	0,45476	2,12816	0,37602	2,41365	0,24269	2,82165
8	0,76290	1,33238	0,62910	1,69926	0,52534	2,01632	0,44406	2,28327	0,31549	2,64456
9	0,82428	1,31988	0,69715	1,64134	0,59477	1,92802	0,51198	2,17662	0,37956	2,50609
10	0,87913	1,31971	0,75798	1,60439	0,65765	1,86397	0,57446	2,09428	0,44448	2,38967
11	0,92733	1,32409	0,81221	1,57935	0,71465	1,81593	0,63206	2,02955	0,50516	2,29593
12	0,97075	1,33137	0,86124	1,56212	0,76666	1,77882	0,68519	1,97735	0,56197	2,21981
13	1,00973	1,34040	0,90544	1,55066	0,81396	1,75014	0,73400	1,93506	0,61495	2,15672
14	1,04495	1,35027	0,94554	1,54318	0,85718	1,72773	0,77898	1,90047	0,66414	2,10414
15	1,07697	1,36054	0,98204	1,53860	0,90674	1,71009	0,82044	1,87189	0,70984	2,06000
16	1,10617	1,37092	1,01543	1,53614	0,93310	1,69614	0,85876	1,84815	0,75231	2,02262
17	1,13295	1,38122	1,04607	1,53525	0,96659	1,68509	0,89425	1,82828	0,79179	1,99079
18	1,15759	1,39133	1,07430	1,53553	0,99755	1,67634	0,92719	1,81157	0,82856	1,96350
19	1,18037	1,40118	1,10040	1,53668	1,02624	1,66942	0,95783	1,79744	0,86285	1,93996
20	1,20149	1,41073	1,12461	1,53849	1,05292	1,66398	1,03811	1,75274	1,00421	1,86079
21	1,22115	1,41997	1,14713	1,42888	1,14319	1,65225	1,06158	1,75911	1,09184	1,85022
22	1,23949	1,43747	1,16815	1,54346	1,07778	1,65974	1,08364	1,74728	1,02762	1,84088
23	1,25665	1,44575	1,18781	1,54639	1,10100	1,65649	1,03811	1,76655	1,05297	1,88634
24	1,27276	1,45371	1,20625	1,54954	1,12276	1,65403	1,06158	1,75911	1,0937	1,87274
25	1,28791	1,46139	1,22358	1,55281	1,14319	1,65101	1,08364	1,75274	1,00421	1,86079
26	1,30219	1,46878	1,23991	1,55620	1,16239	1,65025	1,10444	1,74728	1,02762	1,85022
27	1,31563	1,47589	1,25534	1,55964	1,18051	1,64981	1,12407	1,74260	1,04974	1,84088
28	1,32844	1,48275	1,26992	1,56312	1,19762	1,64981	1,14262	1,73860	1,07060	1,83259
29	1,34054	1,48936	1,28373	1,56661	1,21380	1,64981	1,28484	1,72092	1,23047	1,78594
30	1,35204	1,49436	1,39083	1,59999	1,33835	1,65889	1,37793	1,72135	1,33457	1,77077
40	1,44219	1,50345	1,46246	1,62833	1,42059	1,67385	1,44427	1,72735	1,40832	1,76711
50	1,50345	1,54853	1,61617	1,65184	1,47965	1,68891	1,49434	1,73505	1,46369	1,76827
60	1,54853	1,58341	1,64127	1,55422	1,67152	1,52452	1,70278	1,53370	1,50703	1,77156
70	1,58341	1,61143	1,66197	1,58592	1,68823	1,56001	1,71526	1,56564	1,54202	1,77580
80	1,61143	1,67942	1,61190	1,70262	1,58893	1,72642	1,75082	1,59216	1,57100	1,78039
90	1,63454	1,69439	1,63369	1,71517	1,61306	1,73643	1,75818	—	—	—
100	1,65404	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Prema: <http://www.stanford.edu/~client/bench/dw05a.htm>

Tablica 7. Kritične vrijednosti Durbin–Watsonova testa, razina signifikantnosti 1%

Napomena: veličina K – broj nezavisnih varijabli u modelu

Veličina uzorka	$K = 1$		$K = 2$		$K = 3$		$K = 4$		$K = 5$	
	d_L	d_U								
6	0,38989	1,14213	–	–	–	–	–	–	–	–
7	0,43534	1,03614	0,29406	1,67614	0,22904	2,10170	0,18313	2,43272	–	–
8	0,49727	1,00296	0,34523	1,48873	0,27943	1,87521	0,23028	2,19346	0,14961	2,69026
9	0,55379	0,99799	0,40820	1,38859	0,33974	1,73340	0,28644	2,02944	0,19276	2,45291
10	0,60452	1,00070	0,46572	1,33245	0,39564	1,64046	0,33946	1,91301	0,24437	2,27962
11	0,65279	1,00980	0,51880	1,29672	0,39554	1,57457	0,39074	1,82575	0,29397	2,14978
12	0,69728	1,02310	0,56939	1,27374	0,44855	1,52556	0,44051	1,75730	0,34287	2,04855
13	0,73821	1,03813	0,61624	1,26074	0,49937	1,49013	0,48754	1,70426	0,39083	1,96648
14	0,77607	1,05402	0,65963	1,25412	0,54688	1,46442	0,53196	1,66291	0,43667	1,90034
15	0,81106	1,07020	0,69993	1,25174	0,59130	1,44558	0,57380	1,63022	0,48038	1,84681
16	0,84349	1,08630	0,73733	1,25239	0,63282	1,43193	0,61312	1,60423	0,5289	1,80296
17	0,87363	1,10210	0,77209	1,25512	0,67158	1,42219	0,65007	1,58349	0,56117	1,76675
18	0,90169	1,11748	0,80448	1,25932	0,70780	1,41542	0,68483	1,56690	0,59833	1,73672
19	0,92790	1,13238	0,83472	1,26454	0,74168	1,41093	0,71752	1,55360	0,63345	1,71164
20	0,95243	1,14675	0,86300	1,27047	0,77342	1,40823	0,74830	1,54297	0,66664	1,69063
21	0,97545	1,16059	0,88950	1,27688	0,80319	1,40691	0,77734	1,53449	0,69803	1,67295
22	0,99710	1,17391	0,91440	1,28361	0,83118	1,40669	0,80474	1,52776	0,72774	1,65803
23	1,01750	1,18670	0,93783	1,29051	0,85752	1,40733	0,83065	1,52249	0,75587	1,64540
24	1,03675	1,19899	0,95993	1,29753	0,88236	1,40865	0,83056	1,51841	0,78255	1,63471
25	1,05497	1,21080	0,98080	1,30457	0,90582	1,41051	0,85517	1,51844	0,80786	1,62564
26	1,07223	1,22216	1,00055	1,31160	0,92802	1,41280	0,87842	1,51533	0,83191	1,61795
27	1,08863	1,23308	1,01929	1,31858	0,94905	1,41541	0,90048	1,51306	0,85478	1,61144
28	1,10422	1,24358	1,03707	1,32547	0,96901	1,41831	0,92144	1,51150	0,87655	1,60594
29	1,11906	1,25368	1,05399	1,33226	0,98798	1,42141	0,94140	1,51052	0,94795	1,58371
30	1,13321	1,26342	1,07009	1,33894	1,00603	1,42451	1,09837	1,51844	1,04795	1,58721
40	1,24595	1,34403	1,19756	1,39847	1,14829	1,45665	1,20501	1,53785	1,16409	1,59808
50	1,32441	1,40313	1,28324	1,44574	1,24541	1,49067	1,28285	1,55845	1,24856	1,59808
60	1,38294	1,44869	1,35008	1,48372	1,31670	1,52032	1,34263	1,57778	1,31318	1,61085
70	1,42870	1,48515	1,40041	1,51490	1,37171	1,54579	1,39027	1,59531	1,36449	1,62368
80	1,46571	1,51518	1,44090	1,54105	1,41575	1,56776	1,42931	1,61108	1,40641	1,63591
90	1,49644	1,54046	1,47435	1,56335	1,45197	1,58689	1,46203	1,62527	1,44142	1,64735
100	1,52249	1,56213	1,50257	1,58265	1,48241	1,60370	1,46203	1,62527	1,44142	1,64735

Prema: <http://www.stanford.edu/~clint/bench/dw01a.htm>

Tablica 8. Tablica dijela empirijskih Shewhartovih faktora za izračun granica kontrolnih karata

Veličina uzorka n	Faktor za \bar{x} -kartu	Faktori za R -kartu			
		A_2	D_3	D_4	d_2
2	1,88	0	3,27	1,128	
3	1,02	0	2,57	1,693	
4	0,73	0	2,28	2,059	
5	0,58	0	2,11	2,326	
6	0,48	0	2,00	2,534	
7	0,42	0,08	1,92	2,704	
8	0,37	0,14	1,86	2,847	
9	0,34	0,18	1,82	2,970	
10	0,31	0,22	1,78	3,078	
11	0,29	0,26	1,74	3,173	
12	0,27	0,28	1,72	3,258	
13	0,25	0,31	1,69	3,336	
14	0,24	0,33	1,67	3,407	
15	0,22	0,35	1,65	3,472	
16	0,21	0,36	1,64	3,532	
17	0,20	0,38	1,62	3,588	
18	0,19	0,39	1,61	3,640	
19	0,19	0,40	1,60	3,689	
20	0,18	0,41	1,59	3,735	
21	0,17	0,43	1,58	3,778	
22	0,17	0,43	1,57	3,819	
23	0,16	0,44	1,56	3,858	
24	0,16	0,45	1,55	3,895	
25	0,15	0,46	1,54	3,931	

Prijevod računalnih ispisa po područjima

Deskriptivna statistika programa Excel

Mean – aritmetička sredina uzorka, *standard error* – standardna pogreška procjene aritmetičke sredine, *median* – medijan, *mode* – mod, *standard deviation* – standardna devijacija uzorka, *sample variance* – varijanca uzorka, *kurtosis* – eksces, *skewness* – koeficijent asimetrije uzorka, *range* – raspon varijacije uzorka, *minimum* – najmanja vrijednost podatka, *maximum* – najveća vrijednost podatka, *sum* – zbroj svih vrijednosti u uzorku, *count* – broj podataka u uzorku.

Određivanje veličine uzorka za procjenu aritmetičke sredine populacije

Population standard deviation – standardna devijacija populacije, *sampling error* – greška uzorkovanja, *confidence level* – razina pouzdanosti procjene, *finite populations* – konačne populacije, *sample size needed* – konačna veličina uzorka.

Procjena aritmetičke sredine populacije

Confidence interval estimate for the mean – interval procjene aritmetičke sredine, *sample standard deviation* – standardna devijacija uzorka, *sample mean* – aritmetička sredina uzorka, *sample size* – veličina uzorka, *standard error of the mean* – standardna pogreška procjene aritmetičke sredine, *degrees of freedom* – broj stupnjeva slobode, *t value* – vrijednost varijable *t* (koeficijent pouzdanosti procjene), *interval half width* – umnožak standardne pogreške i koeficijenta pouzdanosti procjene, *confidence interval: interval lower limit, interval upper limit* – interval procjene ako je populacija beskonačna, *finite population: interval lower limit, interval upper limit* – interval procjene ako je populacija konačna.

Procjena aritmetičke sredine populacije

Confidence interval estimate – interval procjene, *sample size* – veličina uzorka, *number of successes* – broj jedinica u uzorku s traženim svojstvom, *confidence level* – razina pouzdanosti procjene, *sample proportion* – proporcija uzorka, *Z value* – koeficijent pouzdanosti procjene, *standard error of the proportion* – standardna pogreška procjene proporcije, *interval half width* – umnožak standardne pogreške i koeficijenta pouzdanosti procjene, *confidence interval: interval lower limit, interval upper limit* – interval procjene proporcije populacije ako je populacija beskonačna, *finite population: interval lower limit, interval upper limit* – interval procjene ako je populacija konačna, *population size* – veličina uzorka.

Određivanje veličine uzorka za procjenu proporcije populacije

Sample size determination – određivanje veličine uzorka, *estimate of true proportion* – procjena proporcije ($p(1-p) = 0,5$), *sampling error* – greška uzorkovanja, *confidence level* – razina pouzdanosti procjene, *z value* – koeficijent pouzdanosti procjene, *calculated sample size* – veličina uzorka, *sample size needed* – konačna veličina uzorka.

Procjena varijance populacije

Confidence interval estimate – interval procjene, *sample size* – veličina uzorka, *sample standard deviation* – standardna devijacija uzorka, *confidence level* – razina pouzdanosti procjene, *degrees of freedom* – broj stupnjeva slobode, *sum of squares* – suma kvadrata, *single tail area* – $(1 - \text{pouzdanost procjene})/2$, *lower Chi-square value* – donja granica kritične vrijednosti hi-kvadrat distribucije, *upper Chi-square value* – gornja granica kritične vrijednosti hi-kvadrat distribucije, *interval lower limit for variance* – donja granica intervala procjene varijance populacije, *interval upper limit for variance* – gornja granica intervala procjene varijance populacije, *interval lower limit for standard deviation* – donja granica intervala procjene standardne devijacije populacije, *interval upper limit for standard deviation* – gornja granica intervala procjene standardne devijacije populacije.

Test hipoteze o prepostavljenoj vrijednosti aritmetičke sredine populacije

t test for hypothesis of the mean – test o prepostavljenoj vrijednosti aritmetičke sredine populacije, *null hypothesis* – prepostavljena vrijednost aritmetičke sredine populacije, *level of significance* – razina signifikantnosti, *sample size* – veličina uzorka, *sample mean* – aritmetička sredina uzorka, *sample standard deviation* – standardna devijacija uzorka, *standard error of the mean* – standardna pogreška proporcije, *degrees of freedom* – broj stupnjeva slobode, *t test statistic* – empirijski *t*-omjer, *lower-tail test* – test na donju granicu, *lower critical value* – donja kritična granica *t*-vrijednosti, *p-value* – *p*-vrijednost, *do not reject the null hypothesis* – ne odbaciti nultu hipotezu.

Test hipoteze o prepostavljenoj proporciji populacije

Z test of hypothesis for the proportion – *z*-test o prepostavljenoj vrijednosti proporcije populacije, *null hypothesis* – prepostavljena vrijednost proporcije populacije, *level of significance* – razina signifikantnosti, *number of successes* – broj jedinica u uzorku s traženim svojstvom, *sample size* – veličina uzorka, *sample proportion* – proporcija uzorka, *standard error* – standardna pogreška proporcije, *Z test statistic* – empirijski *z*-omjer, *lower-tail test* – test na donju granicu, *lower critical value* – donja kritična granica *z*-vrijednosti, *p-value* – *p*-vrijednost, *do not reject the null hypothesis* – ne odbaciti nultu hipotezu.

Test hipoteze o prepostavljenoj varijanci populacije

Chi-square test of variance – hi-kvadrat test o varijanci populacije, *null hypothesis* – prepostavljena vrijednost varijance populacije, *sample size* – veličina uzorka, *sample standard deviation* – standardna devijacija uzorka, *degrees of freedom* – broj stupnjeva slobode $(n - 1)$, *Chi-square statistic* – empirijski hi-kvadrat, *upper-tailed test results* – rezultati jednosmjernog testa na gornju granicu, *upper critical value* – gornja kritična granica, *p-value* – *p*-vrijednost.

Test hipoteze o prepostavljenoj razlici aritmetičkih sredina dviju populacija

Hypothesized difference – prepostavljena razlika aritmetičkih sredina, *level of significance* – razina signifikantnosti, *sample size* – veličina uzorka, *sample mean* – aritmetička sredina uzorka, *sample standard deviation* – standardna devijacija uzorka, *sample degrees of freedom* – broj stupnjeva slobode za uzorak, *pooled variance* – zajednička varijanca, *difference in sample means* – razlika aritmetičkih sredina uzoraka, *t-test statistic* – empirijski *t*-omjer, *lower-tail test* – test na donju granicu, *lower critical value* – donja kritična vrijednost (teorijski *t*, odnosno *z*-omjer), *do not reject the null hypothesis* – ne odbaciti nultu hipotezu.

Test hipoteze o prepostavljenoj razlici proporcija dviju populacija

Hypothesized difference – prepostavljena razlika proporcija dviju populacija, *level of significance* – razina signifikantnosti, *number of successes* – broj povoljnih događaja, *sample size* – veličina uzorka, *group 1 proportion* – proporcija prvog uzorka, *group 2 proportion* – proporcija drugog uzorka, *difference in two proportions* – razlika proporcija dviju populacija, *average proportion* – zajednička proporcija dvaju uzoraka, *z-test statistic* – empirijski *z*-omjer, *two-tailed test* – dvosmjerni test, *lower critical value* – donja kritična vrijednost (teorijski *z*-omjer), *upper critical value* – gornja kritična vrijednost (teorijski *z*-omjer), *do not reject the null hypothesis* – ne odbaciti nultu hipotezu.

Test hipoteze o jednakosti varijanci dviju normalno distribuiranih populacija

Data – podaci, *level of significance* – razina signifikantnosti, *population 1 sample* – uzorak iz prve populacije, *sample size* – veličina uzorka, *sample standard deviation* – standardna devijacija uzorka, *population 2 sample* – uzorak iz druge populacije, *F-test statistic* – empirijski *F*-omjer, *population 1 sample degrees of freedom* – broj stupnjeva slobode za prvi uzorak, *population 2 sample degrees of freedom* – broj stupnjeva slobode za drugi uzorak, *two-tailed test* – dvosmjerni test, *lower critical value* – donja kritična vrijednost (teorijski *F*-omjer), *upper critical value* – gornja kritična vrijednost (teorijski *F*-omjer), *do not reject the null hypothesis* – ne odbaciti nultu hipotezu.

Regresijska analiza

Multiple R – koeficijent multiple linearne korelacije, *R square* – koeficijent determinacije, *adjusted square* – korigirani koeficijent determinacije, *standard error* – procjena standardne devijacije regresije, *observations* – veličina uzorka.

Tablica analize varijance

ANOVA – analiza varijance, *regression* – odstupanja protumačena modelom, *residual* – neprotumačena odstupanja, *total* – suma kvadrata ukupnih odstupanja, *df* – stupnjevi slobode, *SS* – zbroj kvadrata, *MS* – sredine kvadrata, *F* – empirijski *F*-omjer, *significance F* – *p*-vrijednost.

Procjene parametara

Intercept – konstantni član, *coefficients* – koeficijenti, *standard error* – standardna pogreška procjene parametara modela, *t stat* – empirijski *t*-omjer, *p-value* – *p*-vrijednost, *lower 95%* – donja granica 95%-tnog intervala pouzdanosti procjene parametara, *upper 95%* – gornja granica 95%-tnog intervala pouzdanosti procjene parametara.

Interval pouzdanosti procjene očekivane i prognostičke vrijednosti zavisne varijable za zadalu vrijednost nezavisne varijable

Confidence interval estimate – interval pouzdanosti procjene, *X value* – zadana vrijednost nezavisne varijable, *confidence level* – razina pouzdanosti procjene, *intermediate calculations* – medurezultati, *sample size* – veličina uzorka, *degrees of freedom* – broj stupnjeva slobode, *t value* – vrijednost varijable *t* (koeficijent pouzdanosti procjene), *sum of squared difference* – zbroj kvadrata odstupanja, *standard error of the estimate* – standardna pogreška procjene parametra, *average predicted Y (YHat)* – procijenjena (prognostička) vrijednost zavisne varijable, *for average Y (YHat)* – interval pouzdanosti procjene očekivane vrijednosti zavisne varijable, *interval half width* – umnožak standardne pogreške i koeficijenta pouzdanosti procjene, *confidence interval lower limit* – donja granica intervala pouzdanosti procjene očekivane vrijednosti zavisne varijable, *confidence interval upper limit* – gornja granica intervala pouzdanosti procjene očekivane vrijednosti zavisne varijable, *for individual response Y* – prognostički interval, *predicted interval lower limit* – donja granica intervala pouzdanosti procjene prognostičke vrijednosti zavisne varijable, *predicted interval upper limit* – gornja granica intervala pouzdanosti procjene prognostičke vrijednosti zavisne varijable.

Multikolinearnost

Multiple R – koeficijent multiple linearne korelacije, *R square* – koeficijent determinacije, *adjusted square* – korigirani koeficijent determinacije, *standard error* – procjena standardne devijacije regresije, *observations* – veličina uzorka, *VIF* – faktor inflacije varijance.

Autokorelacija

Durbin–Watson calculations – računanje elemenata za Durbin–Watsonovu test veličinu, *sum of squared difference of residuals* – zbroj kvadriranih razlika rezidualnih odstupanja, *sum of squared residuals* – zbroj kvadrata rezidualnih odstupanja (SR), *Durbin–Watson statistic* – DW test veličina.

Statističke metode kontrole kvalitete

Three sigma limit – tri sigma granica, *two sigma limit* – dva sigma granica, *one sigma limit* – jedna sigma granica, *average* – prosjek, *a single point outside the control limits* – jedna točka izvan kontrolnih granica, *two of three points outside the two sigma limit* – dvije od tri točke su izvan dva sigma kontrolne granice, *four of five points outside the two sigma limit* – četiri od pet točaka su izvan dva sigma kontrolne granice, *eight in a row on the same side of centerline* – osam točaka u nizu je s iste strane centralne linije. Prema: American Association for Quality, www.asq.org.

